Funzioni Continue.

Def. Sia $I \subseteq \mathbb{R}$ un intervallo. Una funzione $f: I \to \mathbb{R}$ è continua in $x_0 \in I$ se $\forall \{x_n\}_1^\infty$ successioni in $I - \{x_0\}$,

$$\lim_{n\to\infty} x_n = x_0 \Rightarrow \lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(x_0)$$

Diciamo che f è continua su $J \subseteq I$ se $\forall x_0 \in J$, f è continua in x_0.

Esempi. (1) La funzione $f(x) = x$, $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, è continua su $\mathbb{R}$. Infatti, se $x_n \xrightarrow[n\to\infty]{} x_0 \in \mathbb{R}$, allora (ovviamente) $f(x_n) = x_n \xrightarrow[n\to\infty]{} x_0 = f(x_0)$.

(2) La funzione $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definita da

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x \geq 0 \\ -1 & \text{se } x < 0 \end{cases}$$

non è continua in $x=0$.

Infatti, consideriamo $x_n = -\frac{1}{n} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$ $(n \geq 1)$. Allora, $f(x_n) = f(-\frac{1}{n}) = -1 \xrightarrow[n\to\infty]{} -1$, ma $f(0) = 1 \neq -1$.

Proprietà. Siano $f, g: I \to \mathbb{R}$; $I \subseteq \mathbb{R}$ intervallo; e siano f e g continue in $x_0 \in I$.

Allora:

(1) $f+g$ è continua in x_0

(2) $f \cdot g$ è continua in x_0

(3) se $g(x_0) \neq 0$, allora f/g è continua in x_0
(nota: f/g è definita su di un intervallo J che potrebbe essere più piccolo di I, con $x_0 \in J$).

(4) se $k \in \mathbb{R}$, kf è continua in x_0

(5) se $f(x_0) > 0$, f^g è continua in x_0.
(Nota: come in (3)).

<u>dim.</u> (1) Sia $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ una successione in $I - \{x_0\}$ tale che $x_n \xrightarrow[n\to\infty]{} x_0$. Allora $f(x_n) \xrightarrow[n\to\infty]{} f(x_0)$ (perché f è continua in x_0 per ipotesi) e $g(x_n) \xrightarrow[n\to\infty]{} g(x_0)$ (per ipotesi). Per una proprietà dei limiti e per definizione di $f+g$ ($(f+g)(x) \overset{\text{def.}}{:=} f(x)+g(x)$):

$$\lim_{n\to\infty} (f+g)(x_n) = \lim_{n\to\infty} \left(f(x_n)+g(x_n)\right)$$

$$= \lim_{n\to\infty} f(x_n) + \lim_{n\to\infty} g(x_n) = f(x_0)+g(x_0).$$

(2)–(5) si mostrano allo stesso modo, scaricando proprietà delle funzioni continue su proprietà dei limiti di successioni ■

<u>Teorema</u>. Siano $f: I \to \mathbb{R}$ continua in $x_0 \in I$, $g: J \to \mathbb{R}$ continua in $f(x_0) \in J$; I, J intervalli di $\mathbb{R}$ e $f(I) \subseteq J$.

Allora,

$g \circ f$ è continua in x_0.

<u>dim.</u> Sia $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ una successione in $I - \{x_0\}$.

$$x_n \xrightarrow[n\to\infty]{} x_0 \Rightarrow f(x_n) \xrightarrow[n\to\infty]{} f(x_0) \Rightarrow \underbrace{g(f(x_n))}_{=(g\circ f)(x_n)} \xrightarrow[n\to\infty]{} \underbrace{g(f(x_0))}_{=(g\circ f)(x_0)}$$

perché f è continua in x_0.

perché g è continua in $f(x_0)$. ■

<u>Proprietà</u>. Se $x_n \xrightarrow[n\to\infty]{} x_0 \in I$, $\{x_n\}$ successione in I, intervallo di $\mathbb{R}$, e se $f: I \to \mathbb{R}$ è continua in x_0, allora $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = x_0$.

<u>dim.</u> Ovvio, ma utile nel calcolo dei limiti ■

Nota. Nella definizione di funzione continua non è necessario considerare $\{x_n\}$ successione in $I - \{x_0\}$: basta che sia una successione in I.
La restrizione è invece necessaria nella teoria di limiti di funzioni.

Proprietà globali delle funzioni continue.

Def. Sia $f : I \to \mathbb{R}$ una funzione, $I \subseteq \mathbb{R}$ un intervallo e sia $x_0 \in I$.
x_0 è un punto di massimo per f in I se

$\forall x \in I : f(x) \leq f(x_0)$.

Cioè se $f(x_0) = MAX\{f(x) : x \in I\}$.

Se $x_0 \in J \subseteq I$ e $\forall x \in J : f(x) \leq f(x_0)$, diciamo che f è un punto di massimo per f in J.

~~Def~~ Se $x_0 \in I$ è un punto di massimo per f in I, diciamo che $f(x_0)$ è il massimo di f su I:

$$f(x_0) = \max_{x \in I} f(x) = \max_I f.$$

Teorema (Weierstrass). Se $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ è continua su $[a, b]$, con $a < b$; $a, b \in \mathbb{R}$; allora $\exists x_0 \in I$: x_0 è un punto di massimo per f in I.

Cioè, esiste $x_0 \in I$: $\forall x \in I$ $f(x) \leq f(x_0)$

Analogamente si definiscono minimo e punto di minimo.

<u>Corollario</u>. Se $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ è continua su $[a,b]$, allora f ha un punto di minimo in $[a,b]$.

<u>Teorema degli zeri</u>. Sia $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ una funzione continua su $[a,b]$ e supponiamo che $f(a)<0<f(b)$. Allora, $\exists\, c\in(a,b)$:

$$f(c)=0.$$

<u>Dim</u>. Poniamo $a_0=a$ e $b_0=b$. Consideriamo $c_1=\dfrac{a_0+b_0}{2}$, il punto medio di $[a_0,b_0]$.

- Se $f(c_1)=0$, la tesi vale.
- Se $f(c_1)>0$, poniamo $a_1=a_0$, $b_1=c_1$:

$$(*1)\begin{cases} a_0\le a_1<b_1\le b_0\,; \quad f(a_1)<0<f(b_1); \\ b_1-a_1=\dfrac{b-a}{2}. \end{cases}$$

- Se $f(c_1)<0$, poniamo invece $a_1=c_1$, $b_1=b_0$. Valgono ancora le $(*1)$.

Iteriamo la procedura. Cioè, supponendo di aver già trovato $a_0,a_1,\dots,a_n;\ b_0,b_1,\dots,b_n$ t.c.

$$(*n)\quad \begin{aligned} &a_0\le a_1\le\dots\le a_n<b_n\le b_{n-1}\le\dots\le b_1\le b_0;\\ &f(a_j)<0<f(b_j)\quad \text{per } j=1,\dots,n;\\ &b_j-a_j=\frac{b-a}{2^j}; \end{aligned}$$

poniamo $$c_{n+1}=\frac{b_n+a_n}{2}.$$

Ancora, abbiamo tre casi.

- Se $f(c_{n+1})$, la tesi è verificata;

- se $f(c_{n+1}) > 0$, poniamo $a_{n+1} = a_n$; $b_{n+1} = c_{n+1}$;
- se $f(c_{n+1}) < 0$, poniamo $a_{n+1} = c_{n+1}$; $b_{n+1} = b_n$.

Procedendo, ~~...~~ a meno di non trovare che $f(c_n) = 0$ $\forall n$ (che ci varrebbe), troviamo due successioni in $[a, b]$:

(i) $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$, crescente: $a_n \leq a_{n+1}$ $\forall n \geq 0$; limitata superiormente, perché $a_n \leq b$ $\forall n \geq 0$.

(ii) $\{b_n\}_{n=0}^{\infty}$, decrescente: $b_n \geq b_{n+1}$ $\forall n \geq 0$; limitata inferiormente, perché $b_n \geq a$ $\forall n \geq 0$.

(iii) $b_n - a_n = \dfrac{b-a}{2^n}$

Per il Teorema sul limite delle successioni monotone, $\exists \lim_{n \to \infty} a_n = \alpha \leq b$ e $\exists \lim_{n \to \infty} b_n = \beta \geq a$; $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

Inoltre, $\beta - \alpha = \lim_{n \to \infty} (b_n - a_n) = \lim_{n \to \infty} \dfrac{b-a}{2^n} = 0$;

cioè: $\beta = \alpha$.

Per il Teorema sulla permanenza del segno nei limiti di successione (confronto) e per definizione di funzione continua,

$$0 \geq \lim_{n \to \infty} f(a_n) = f\left(\lim_{n \to \infty} a_n\right) = f\left(\lim_{n \to \infty} b_n\right)$$
$$= \lim_{n \to \infty} f(b_n) \geq 0, \text{ cioè: } f(\alpha) = 0.$$

Pongo $c = \alpha$ ▨