

Prova scritta complessiva di Analisi Matematica I

Ingegneria Edile-Architettura, 2009/10

9 febbraio 2010

Per essere ammessi prova orale occorre ottenere almeno 15 pt. Negli esercizi a risposta aperta non ci sono punteggi negativi.

Segnare qui un giorno in cui **non** si vuole sostenere la prova orale:.....

(1) [5 pt.] Calcolare il limite¹:

$$L = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{e^{4x} - \sin(4x) - \frac{1}{\cos(4x)}}{e^{2x} \sin(x)(1 - \cos(4x))}$$

- $L = \infty$
- $L = \frac{8}{3}$
- $L = \frac{4}{3}$
- $L = \frac{64}{3}$

¹Alcuni sviluppi di Taylor (con $y \rightarrow 0$):

$$e^y = 1 + y + \frac{y^2}{2} + \frac{y^3}{6} + \frac{y^4}{24} + \frac{y^5}{120} \dots$$

$$\sin(y) = y - \frac{y^3}{6} + \frac{y^5}{120} + \dots$$

$$\cos(y) = 1 - \frac{y^2}{2} + \frac{y^4}{24} + \dots$$

$$(1 - y)^{-1} = 1 + y + y^2 + y^3 + y^4 + y^5 + \dots$$

(2) [3 pt.] Risolvere il problema di Cauchy:

$$\begin{cases} y'(x) = \frac{e^{-y^2} \log(x+4)}{2y} \\ y(0) = -1 \end{cases}$$

calcolando esplicitamente gli integrali che si trovano.

(3) [3 pt] Risolvere in $\mathbb{C}$ l'equazione:

$$(z^4 + 4 + 4i)(z^2 + 8z + 25) = 0.$$

(4) [4 pt. se la risposta è esatta, -1 se è errata] Sia $f :]0, 1[\rightarrow \mathbb{R}$ una funzione crescente in $]0, 1[$ e continua in $]0, 1[$. Quale delle seguenti affermazioni segue *necessariamente* dalle ipotesi?

- $\forall x \in]0, 1[: f'(x) \geq 0$.
- $\exists \lim_{x \rightarrow 0} f(x) \in \mathbb{R}$.
- $\exists \lim_{x \rightarrow 1} f(x) \in \mathbb{R}$.
- $\exists \lim_{x \rightarrow 1} f(x) = f(1)$.

(5) [3 pt.] Sia $h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione derivabile su $\mathbb{R}$ e si definisca, per x in $\mathbb{R}$,

$$f(x) = \int_0^{h(x)} h(4t) dt$$

Calcolare $f'(x)$.

(6) [4 pt.] Calcolare: $\int_0^{2 \ln 4} \frac{\sqrt{e^x} + 7e^{x+\ln 2}}{2e^x + 16} dx$

(7) Sia $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ la funzione definita da

$$f(x) = (|x + 4| + 2)e^{\frac{1}{x+4}}$$

- 1 pt. Trovare il dominio di f e calcolare $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x)$.
- 2 pt. Calcolare la derivata di f e il suo dominio.
- 3 pt. Trovare su quali intervalli di $\mathbb{R}$ la funzione f è, rispettivamente, crescente o decrescente.
- 2 pt. Disegnare il grafico di f .

$$(1) \frac{e^{4x} - \sin(4x) - \frac{1}{\cos(4x)}}{e^{2x} \cdot \sin(x) \cdot (1 - \cos(4x))} \quad x \rightarrow 0^+$$

$$\frac{\left[1 + 4x + \frac{(4x)^2}{2} + \frac{(4x)^3}{6} + o(x^3)\right] - \left[4x - \frac{(4x)^3}{6} + o(x^3)\right] - \frac{1}{1 - \frac{(4x)^2}{2}}}{1 \cdot x \cdot \left[1 - \left(1 - \frac{(4x)^2}{2} + o(x^2)\right)\right]}$$

$$x \rightarrow 0^+ \quad \frac{1 + 4x + \frac{(4x)^2}{2} + \frac{(4x)^3}{6} - 4x + \frac{(4x)^3}{6} - \left[1 + \frac{(4x)^2}{2} + o(x^3)\right]}{x \cdot \frac{(4x)^2}{2}}$$

$$x \rightarrow 0^+ \quad \frac{2 \cdot \frac{(4x)^3}{6}}{x \cdot \frac{(4x)^2}{2}} = \frac{2 \cdot 4 \cdot 2}{6} = \frac{8}{3}$$

$$(2) \begin{cases} y'(x) = \frac{e^{-y^2} \cdot \log(x+4)}{2y} \\ y(0) = -1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2y \cdot e^{y^2} \cdot dy = \log(x+4) \cdot dx \\ y(0) = -1 \end{cases}$$

$$\int_{y(0)=-1}^{y(x)} 2s \cdot e^{s^2} ds \stackrel{||}{=} \int_0^x \log(t+4) dt = \left[(t+4) \log(t+4) \right]_0^x - \int_0^x \frac{t+4}{t+4} dt$$

$$\stackrel{||}{=} (x+4) \log(x+4) - x$$

$$e^{y(x)^2} = (x+4) \log(x+4) - x + e$$

$$e^{y(x)^2} - e^1$$

$$e^{y(x)^2} = (x+4) \log(x+4) - x + e$$

$$y(x)^2 = \log \left((x+4) \log(x+4) - x + e \right)$$

$$y(x) = \pm \sqrt{\log \left((x+4) \log(x+4) - x + e \right)}$$

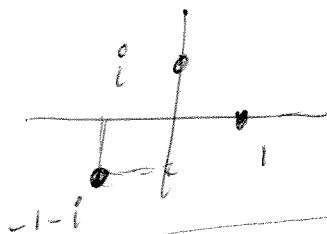
$$y(0) = -1 \quad \text{q-nimniti}$$

$$y(x) = -\sqrt{\log \left((x+4) \log(x+4) - x + e \right)} \quad \text{v.p.T}$$

(3)

$$z^4 + 4 + 4i = 0$$

$$z^4 = 4(-1-i)$$



$$|4 + 4i| = 4\sqrt{2}$$

$$\arg\left(\frac{-1}{-1}\right) = \pi/4$$

$$z = \sqrt[4]{4\sqrt{2}} \cdot \left[\cos\left(\frac{\pi}{4} + \pi + \frac{k\pi}{2}\right) + i \sin\left(\frac{\pi}{4} + \pi + \frac{k\pi}{2}\right) \right]$$

$$k = 0, 1, 2, 3$$

$$0 = z^2 + 8z + 25 = z^2 + 8z + 16 + 9 = (z+4)^2 + 3^2$$

$$(z+4)^2 = -3^2$$

$$z+4 = \pm 3i$$

$$z = -4 \pm 3i$$

(4) Le tiorie dica che, essendo f in $]0,1[$,

$$\exists \lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \sup_{x \in]0,1[} f(x) \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$$

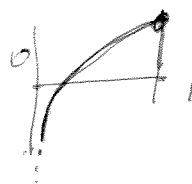
$$\text{e } \exists \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \inf_{x \in]0,1[} f(x) \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$$

f è cesa in $]0,1[$, quindi $\sup_{x \in]0,1[} f(x) \leq f(1)$,

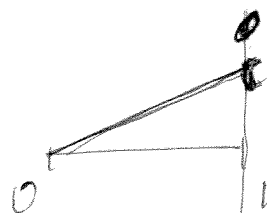
$$\text{Anzi } \boxed{\exists \lim_{x \rightarrow 1} f(x) \in \mathbb{R}}$$

• Non è detto che f sia derivabile in $]0,1[$

• Potrebbe essere $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = -\infty$



• f può essere discontinua in $x=1$



(5) $f(x) = \int_0^{h(x)} h(4t) dt$ lo scrivo come
composizione:

$$x \mapsto h(x) = y \mapsto g(y) = \int_0^y h(4t) dt = \int_0^{h(x)} h(4t) dt = f(x)$$

not: $f(x) = g(h(x)) = (g \circ h)(x)$ e

$$f'(x) = g'(h(x)) \cdot h'(x) = h(4 \cdot h(x)) \cdot h'(x)$$

$g'(y) = h(4y)$ per Tco. Fondl.
Calc. Int.

(6) $\int_0^{2 \log 4} \frac{\sqrt{e^x} + 7 \cdot e^{x + \log 2}}{2e^x + 16} dx =$

$$= \int_0^{2 \log 4} \frac{e^{x/2}}{2e^x + 16} dx + \int_0^{2 \log 4} \frac{7 \cdot e^x \cdot 2}{2e^x + 16} dx$$

$y = \sqrt{e^x} = e^{x/2}$
 $dy = \frac{1}{2} e^{x/2} dx$
in I_1

$= I_1 + I_2$

$$= \int_{e^{0/2}=1}^{(2 \log 4)^{1/2}=2} \frac{2 dy}{2y^2 + 16} + \int_{e^0=1}^{e^{2 \log 4}=16} \frac{(2 \cdot 7 \cdot dz)}{2z + 16}$$

$$= \int_1^2 \frac{dy}{y^2 + 8} + 7 \cdot \int_1^{16} \frac{dz}{z + 8}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{8}} \left[\arctan \left(\frac{y}{\sqrt{8}} \right) \right]_1^2 + 7 \left[\log(z + 8) \right]_1^{16}$$

$$(7) \quad f(x) = (|x+4|+2) e^{\frac{1}{x+4}}$$

$$\text{Dominio}(f) = \text{Dominio}(f') = \mathbb{R} \setminus \{-4\}$$

$$\lim_{x \rightarrow \pm \infty} f(x) = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -4^-} f(x) = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow -4^+} f(x) = +\infty$$

$$f'(x) = e^{\frac{1}{x+4}} \cdot \left[\text{sgn}(x+4) + (|x+4|+2) \left(-\frac{1}{(x+4)^2} \right) \right]$$

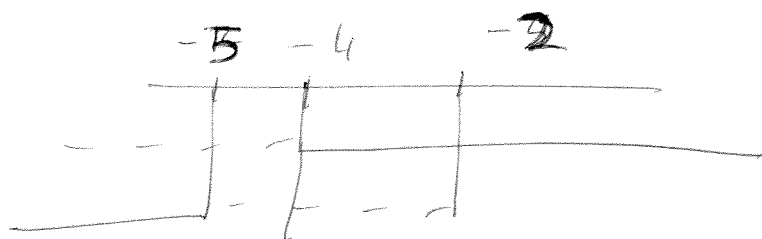
$$= \frac{e^{\frac{1}{x+4}}}{(x+4)^2} \cdot \left[\text{sgn}(x+4) \cdot (x+4)^2 - (|x+4|+2) \right]$$

$$f'(x) \geq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x+4 \geq 0 \\ (x+4)^2 - [(x+4)+2] \geq 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x+4 \leq 0 \\ -(x+4)^2 - [-(x+4)+2] \geq 0 \end{cases}$$

$$1. \quad x+4 \geq 0$$

$$0 \leq x^2 + 16 + 8x - x - 6 = x^2 + 7x + 10 = (x+5)(x+2)$$



$$x \geq -2$$

$$2. \quad \begin{cases} x+4 \leq 0 \\ 0 \leq -x^2 - 16 - 8x + x + 2 = -(x^2 + 7x + 14) \end{cases}$$

$$\Delta = 7^2 - 4 \cdot 14 = 49 - 56 < 0 \quad \text{mai verificata}$$

f e crescentă în $[2, +\infty[$; decrescentă în $] -\infty, -4[$
 e $] -4, -2[$.

