II prova parziale scritta di Analisi Matematica I

Ingegneria Edile-Architettura, 2009/10

22 gennaio 2010

Nota sul punteggio. Per l'esercizio a risposta multipla, il punteggio è di 8 pt. per la risposta esatta, -2 pt. per la risposta errata e 0 pt. per la risposta non data. Per essere ammessi alla prova orale occorre ottenere almeno 15 pt. Negli esercizi a risposta aperta non ci sono punteggi negativi.

Segnare qui un giorno in cui **non** si vuole sostenere la prova orale:...

(1) [8 pt.] Calcolare il limite[1]:

$$L = \lim_{x \to 0^+} \frac{2e^{2x} + 2\cos(2x) - 4 - \sin(4x)}{\sin^2(4x)\log(1 + 3x + 7x^2)}$$

- $L = \infty$
- $L = \frac{5}{18}$
- $L = \frac{10}{9}$
- $L = 0$

[1] Alcuni sviluppi di Taylor (con $y \to 0$):

$$e^y = 1 + y + \frac{y^2}{2} + \frac{y^3}{6} + \frac{y^4}{24} + \frac{y^5}{120} \dots$$

$$\sin(y) = y - \frac{y^3}{6} + \frac{y^5}{120} + \dots$$

$$\cos(y) = 1 - \frac{y^2}{2} + \frac{y^4}{24} + \dots$$

$$\log(1 + y) = y - y + \frac{y^2}{2} - \frac{y^3}{3} + \frac{y^4}{4} \dots$$

(2) [9 pt.] Calcolare l'integrale:

$$\int_{1/2}^{1} \frac{\log(x)}{\log^2(2x) + \log^2(2)} \frac{dx}{x}.$$

(3) Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la funzione definita da

$$f(x) = (|x^2 - 4| + x^2 - 4)e^{-|x-2|} + 3$$

2 pt. Calcolare $\lim_{x \to \pm\infty} f(x)$.

2 pt. Calcolare la derivata di f e il suo dominio.

5 pt. Trovare su quali intervalli di $\mathbb{R}$ la funzione f è, rispettivamente, crescente o decrescente.

4 pt. Disegnare il grafico di f.

Facoltativo. [Nessun punteggio formale.] Trovare la soluzione del problema di Cauchy

$$\begin{cases} y'(x) = \frac{x^3+x}{y} \\ y(0) = -1 \end{cases}$$

Prova scritta complessiva di Analisi Matematica I

Ingegneria Edile-Architettura, 2009/10

22 gennaio 2010

Per essere ammessi prova orale occorre ottenere almeno 15 pt. Negli esercizi a risposta aperta non ci sono punteggi negativi.

Segnare qui un giorno in cui **non** si vuole sostenere la prova orale:..

(1) [8 pt.] Calcolare il limite[1]:

$$L = \lim_{x \to 0^+} \frac{2e^{2x} + 2\cos(2x) - 4 - \sin(4x)}{\sin^2(4x)\log(1 + 3x + 7x^2)}$$

- $L = \infty$
- $L = \frac{5}{18}$
- $L = \frac{10}{9}$
- $L = 0$

[1] Alcuni sviluppi di Taylor (con $y \to 0$):

$$e^y = 1 + y + \frac{y^2}{2} + \frac{y^3}{6} + \frac{y^4}{24} + \frac{y^5}{120} \dots$$

$$\sin(y) = y - \frac{y^3}{6} + \frac{y^5}{120} + \dots$$

$$\cos(y) = 1 - \frac{y^2}{2} + \frac{y^4}{24} + \dots$$

$$\log(1 + y) = y - \frac{y^2}{2} + \frac{y^3}{3} - \frac{y^4}{4} + \dots$$

(2) [5 pt.] Calcolare l'integrale:

$$\int_{1/2}^{1} \frac{\log(x)}{\log^2(2x) + \log^2(2)} \frac{dx}{x}.$$

(3) [3 pt] Risolvere in $\mathbb{C}$ l'equazione:

$$(z^5 + 2i)(z^2 - 6iz - 5) = 0.$$

(4) [4 pt. se la risposta è esatta, -1 se è errata] Sia $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ una funzione continua in $[0,1]$ e derivabile in $]0,1[$. Supponiamo che $f(1) = f(0) + 2$. Quale delle seguenti affermazioni segue *necessariamente* dalle ipotesi?

- Sia $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definita come $g(x) = f(x) + 2$. Allora esiste $x \in]0,1[$: $g'(x) = 0$.
- Esiste $x \in]0,1[$: $f'(x) > 0$.
- Esiste $x \in]0,1[$: $f'(x) < 0$.
- f è crescente in $[0,1]$.

(5) [4 pt. se la risposta è esatta, -1 se è errata] Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funzione derivabile su $\mathbb{R}$ e si definisca, per x in $\mathbb{R}$,

$$h(x) = \log\left(f\left(e^{2x}\right)\right)^3$$

Calcolare $f'(1)$.

- $h'(1) = 3f'(1)$
- $h'(1) = \frac{3f'(e^2)}{f(e^2)}$
- $h'(1) = \frac{6f'(e^2)e^2}{f(e^2)}$
- $h'(1) = 6f'(1)$

(6) Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la funzione definita da

$$f(x) = (|x^2 - 4| + x^2 - 4)e^{-|x-2|} + 3$$

2 pt. Calcolare $\lim_{x\to\pm\infty} f(x)$.

1 pt. Calcolare la derivata di f e il suo dominio.

4 pt. Trovare su quali intervalli di $\mathbb{R}$ la funzione f è, rispettivamente, crescente o decrescente.

3 pt. Disegnare il grafico di f.