Svolgimento.

# Prova scritta complessiva di Analisi Matematica I

Ingegneria Edile-Architettura, 2009/10

30 giugno 2010

Per essere ammessi prova orale occorre ottenere almeno 15 pt. Negli esercizi a risposta aperta non ci sono punteggi negativi.

**Segnare qui** un giorno in cui **non** si vuole sostenere la prova orale:...............................................

**(1)** [4 pt. se la risposta è esatta, $-1$ se è errata] Calcolare il limite[1]:

$$L = \lim_{x \to 0^+} \frac{e^{2x} - \frac{1}{1-2x}}{\sin(4x)\sin(2x)\cos(x)}$$

- $L = 0$
- $L = -\frac{1}{4}$
- $L = -1$
- $L = \infty$

[1]Alcuni sviluppi di Taylor (con $y \to 0$):

$$e^y = 1 + y + \frac{y^2}{2} + \frac{y^3}{6} + \frac{y^4}{24} + \frac{y^5}{120} \dots$$

$$\sin(y) = y - \frac{y^3}{6} + \frac{y^5}{120} + \dots$$

$$\cos(y) = 1 - \frac{y^2}{2} + \frac{y^4}{24} + \dots$$

$$(1-y)^{-1} = 1 + y^2 + y^3 + y^4 + y^5 + \dots$$

**(2)** [5 pt.] Calcolare l'integrale:

$$\int_0^{1/3} x\sqrt{e^{\frac{x^2}{9}}}\,dx.$$

**(3)** Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la funzione definita da

$$f(x) = (x + |x|)e^{x^2-3x}.$$

2 pt. Calcolare $\lim_{x\to\pm\infty} f(x)$.

1 pt. Determinare l'insieme dei punti in cui la funzione è continua.

1 pt. Calcolare la derivata di $f$ e il suo dominio.

3 pt. Trovare su quali intervalli di $\mathbb{R}$ la funzione $f$ è, rispettivamente, crescente o decrescente.

3 pt. Disegnare il grafico di $f$.

**(4)** [4 pt. se la risposta è esatta, $-1$ se è errata] Siano $f, g : [0,1] \to \mathbb{R}$ due funzioni continue in $[0,1]$ e derivabili in $]0,1[$. Supponiamo che $f(0) = 0$, $f(1) = 5$, $g(0) = 10$, $g(1) = 0$. Quale delle seguenti affermazioni **non** segue *necessariamente* dalle ipotesi?

- Esiste $x \in ]0,1[$: $f'(x) + g'(x) = -5$.
- Esiste $x \in ]0,1[$: $f(x) = g(x)$.
- X Esiste $x \in ]0,1[$: $f'(x) = g'(x)$.
- Esiste $x \in ]0,1[$: $f'(x) = -\frac{1}{2}g'(x)$

**(5)** [4 pt] Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funzione derivabile su $\mathbb{R}$ e si definisca, per $x$ in $\mathbb{R}$,

$$h(x) = f(x + \sin(f(x)))$$

Calcolare $h'(x)$.

(i) $[f'(x)]^2(1 + \cos(x))$.

(ii) $f'(1 + \cos(f'(x)))$.

X (iii) $f'(x + \sin(f(x)))(1 + \cos(f(x)))f'(x)$.

(iv) $-f'(1 + \cos(f(x)))\sin(f(x))f'(x)$.

**(6)** [3 pt] Risolvere in $\mathbb{C}$ l'equazione:

$$(z^3 + 2)(z^2 - 2iz - 5) = 0.$$

(1) $e^{2x} = 1 + 2x + \frac{(2x)^2}{2} + \underset{x\to 0^+}{o(x^2)}$

$\frac{1}{1-2x} = 1 + 2x + (2x)^2 + \underset{x\to 0^+}{o(x^2)}$

$\sin(4x) = 4x + \underset{x\to 0^+}{o(x)}$ e $\sin(2x) = 2x + \underset{x\to 0^+}{o(x)}$

Inoltre $\cos(x) \underset{x\to 0^+}{\longrightarrow} 1$.

L'espressione $f(x)$ di cui si calcola il limite è:

$$f(x) = \frac{[1+2x+(2x)^2/2 + o(x^2)] - [1+2x+(2x)^2+o(x^2)]}{[4x+o(x)]\cdot[2x+o(x)]\cdot(1+o(1))}$$

$$\underset{x\to 0^+}{\sim} \frac{-\frac{1}{2}(2x)^2}{4x\cdot 2x} = -\frac{4}{4^2} = -\frac{1}{4}$$

(2) $\int_0^{1/3} x\cdot\sqrt{e^{x^2/9}}\,dx = \int_0^{1/3} x\cdot e^{x^2/18}\,dx = \left[e^{x^2/18}\cdot 9\right]_0^{1/3}$

$= 9\cdot\left[e^{\frac{1}{162}} - 1\right].$

(3) Osservo che $x+|x| = \begin{cases} x+x = 2x & \text{se } x \geq 0 \\ x-x = 0 & \text{se } x \leq 0 \end{cases}$

quindi che $f(x) = 0$ $\forall x \leq 0$. In particolare $\lim_{x\to-\infty} f(x) = 0$

$f$ è continua su $\mathbb{R}$.

$\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ poiché $x^2-3x = x^2\left(1-\frac{3}{x}\right) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$,

quindi $\underset{\text{se } x\geq 0}{f(x) =} 2x\cdot e^{x^2-3x} \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty\cdot e^{+\infty} = +\infty$

Se $x \neq 0$, esiste $f'(x)$.

Se $x<0$, $f'(x) = 0$

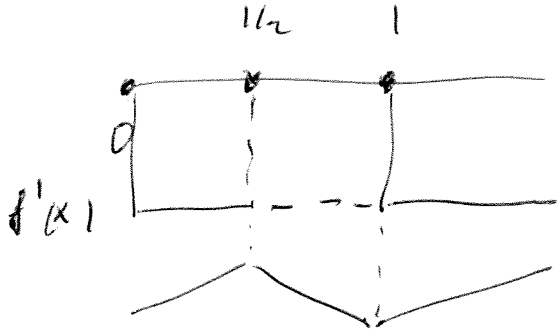
Se $x>0$, $f'(x) = 2\cdot e^{x^2-3x} + 2x\cdot e^{x^2-3x}\cdot(2x-3)$

$= 2\cdot e^{x^2-3x}\cdot(2x^2-3x+1)$

$\lim_{x\to 0^+} f'(x) = 2 \neq 0 = \lim_{x\to 0^-} f'(x)$: non esiste $f'(0)$

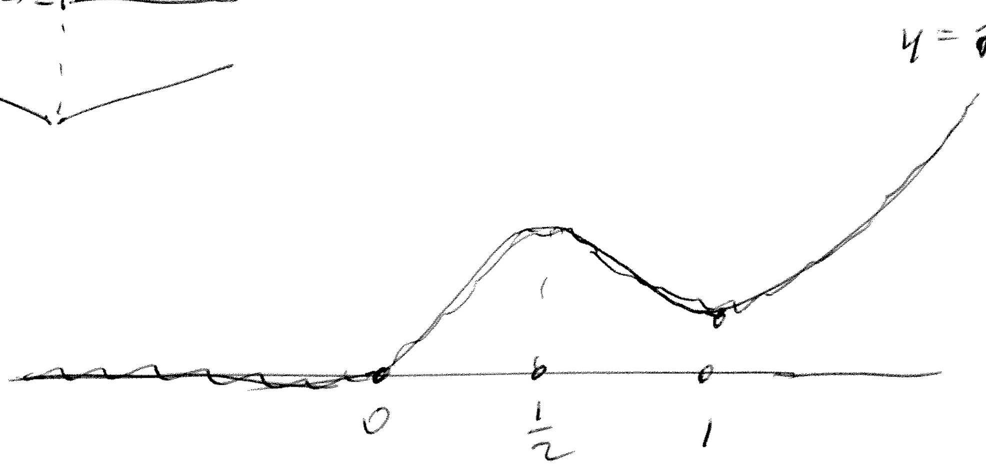
$f'(x) \geq 0$ (con $x>0$) $\iff \begin{cases} 2x^2-3x+1 \geq 0 \\ x>0 \end{cases}$

$$2x^2-3x+1=0 \iff x = \frac{3\pm\sqrt{1}}{4} = 1,\ 1/2$$




$x=1/2$: pto di MAX. rel.

$x=1$: pto di min. rel.



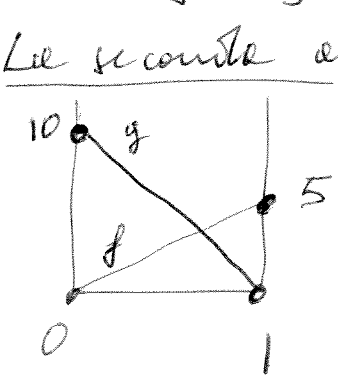

(4)

- Sia $h(x)=f(x)+g(x)$: $h(0)=10$; $h(1)=5$ e $h$ soddisfa le ipotesi del T. di Lagrange, quindi $\exists x \in ]0,1[$: $f'(x)+g'(x)=h'(x)=\frac{h(1)-h(0)}{1-0} = -5$

  La prima affermazione è necessaria.

- Sia $a(x)=f(x)-g(x)$: $a$ è continua in $[0,1]$ e $a(0)=-10<0<5=a(1)$. Per il T. degli zeri $\exists x\in ]0,1[$: $0=a(x)=f(x)-g(x)$

  La seconda affermazione è necessaria.

- 


  Posso prendere $f(x)=5x$; $g(x)=10-10x$: le ipotesi sono verificate, ma $f'(x)=5 \neq -10 = g'(x)$ $\forall x\in ]0,1[$.

La terza affermazione non è necessaria.

- Pongo $k(x) = f(x) + \frac{1}{2} g(x)$: $k(0) = 5 = k(1)$ e sono soddisfatte le ipotesi del T. di Rolle; quindi $\exists x \in ]0,1[$: $0 = k'(x) = f'(x) + \frac{1}{2} g'(x)$.

<u>La quarta affermazione è necessaria.</u>

(4) $h(x) = f(x + \sin(f(x))) \Rightarrow$

$$h'(x) = f'(x + \sin(f(x))) \cdot [1 + \cos(f(x)) \cdot f'(x)]$$

(5) $z^3 = -2 = 2 \cdot e^{-\pi i} \Leftrightarrow z = \sqrt[3]{2} \cdot e^{-\frac{\pi i}{3} + \frac{2k\pi i}{3}}$ $(k = 0,1,2)$

$= \sqrt[3]{2} \cdot \left[\cos\left(-\frac{\pi}{3} + \frac{2k\pi}{3}\right) + i \sin\left(-\frac{\pi}{3} + \frac{2k\pi}{3}\right)\right]$ $(k = 0,1,2)$

Queste sono tre soluzioni.

$z^2 - 2iz - 5 = 0$ $\qquad \Delta = (2i)^2 + 20 = 20 - 4 = 16$

$$z = \frac{2i \pm \sqrt{16}}{2} = \frac{2i \pm 4}{2} = i \pm 2$$

Queste sono altre due soluzioni.