Prova scritta complessiva di Analisi Matematica I

Ingegneria Edile-Architettura, 2009/10

26 luglio 2010

Per essere ammessi prova orale occorre ottenere almeno 15 pt. Negli esercizi a risposta aperta non ci sono punteggi negativi.

(1) [8 pt.] Calcolare il limite[1]:

$$L = \lim_{x\to 0^+} \frac{\frac{1}{\sqrt{1+2x+4x^2}} - e^{2x^3} + 2x}{\log(1+2x) + \log(1-2x)}$$

- $L = \infty$
- $L = 2$
- $L = -\frac{1}{2}$
- $L = 0$

[1]Alcuni sviluppi di Taylor (con $y \to 0$):

$$e^y = 1 + y + \frac{y^2}{2} + \frac{y^3}{6} + \frac{y^4}{24} + \frac{y^5}{120}\dots$$

$$(1+y)^\alpha = 1 + \alpha y + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2}y^2 + \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{2\cdot 3}y^3 + \dots,\ se\ \alpha \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$$

$$\log(1+y) = y - \frac{y^2}{2} + \frac{y^3}{3} - \frac{y^4}{4} + \dots$$

(2) [5 pt.] Calcolare l'integrale:

$$\int_0^{\pi/4} \frac{\sin(2x)}{\sin^2(x)+1}\,dx.$$

(3) [3 pt] Risolvere in $\mathbb{C}$ l'equazione:

$$\left(z^3+2\right)\left(z^2-2iz\right)=0.$$

(4) [4 pt. se la risposta è esatta, -1 se è errata] Siano $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ e $g : [0,1] \to \mathbb{R}$ due funzioni. Supponiamo che f sia crescente e che $f(0) = 0$ e che $f(1) = 2$. Supponiamo inoltre che g sia decrescente e che $g(0) = 1/2$ e $g(1) = 0$. Quale delle seguenti affermazioni segue *necessariamente* dalle ipotesi?

- Esiste x in $[0,1]$ tale che $f(x) = g(x)$.
- La funzione $g \circ f : [0,1] \to \mathbb{R}$ è ben definita ed è decrescente in $[0,1]$.
- La funzione $f \circ g : [0,1] \to \mathbb{R}$ è ben definita ed è decrescente in $[0,1]$.
- La funzione $f + g$ è crescente in $[0,1]$.

(5) [4 pt.] Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funzione derivabile su $\mathbb{R}$ e si definisca, per x in $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$,

$$h(x) = e^{f(\log|x+1|)}$$

Calcolare $f'(-2)$.

(6) Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la funzione definita da

$$f(x) = \frac{1}{x^3 - x + |x^3 - x| + 1}$$

2 pt. Calcolare $\lim_{x\to\pm\infty} f(x)$.

1 pt. Calcolare la derivata di f e il suo dominio.

4 pt. Trovare su quali intervalli di $\mathbb{R}$ la funzione f è, rispettivamente, crescente o decrescente.

3 pt. Disegnare il grafico di f.

(1) Denominatore: $\log(1+2x)+\log(1-2x) = \log[(1+2x)(1-2x)]$

$= \log(1-4x^2) \underset{x\to 0}{\sim} -4x^2$

Numeratore: $\frac{1}{1+2x+4x^2} - e^{2x^3} + 2x =$

$= 1 + (-2x-4x^2) + (-2x)^2 + \underset{x\to 0}{o}(x^2) - (1 + \underset{x\to 0}{o}(x^2)) + 2x$

$= 0 + 0\cdot x + 0\cdot x^2 + o(x^2) = o(x^2)$

$\Rightarrow \frac{Num}{Den} \underset{x\to 0}{\sim} \frac{\underset{x\to 0}{o}(x^2)}{-4x^2} = \underset{x\to 0}{o}(1) \xrightarrow[x\to 0]{} 0$:

il limite è $L=0$.

(2) $\int_0^{\pi/4} \frac{\sin(2x)}{\sin^2(x)+1}\,dx = \int_0^{\pi/4} \frac{2\cdot\sin(x)\cos(x)}{\sin^2(x)+1}\,dx$

$= 2\int_0^1 \frac{y}{y^2+1}\,dy = \log(y^2+1)\Big|_0^1$

$y = \sin(x)$

$dy = \cos(x)\,dx$

$y(0)=0;\ y(\pi/4)=1$

$= \log 2$

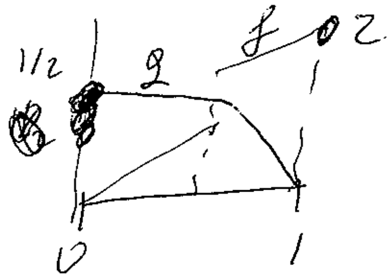
(3) $(z^3+2)\cdot(z^2-2iz) = (z^3+2)\cdot z(z-2i) = 0$

sse $z^3 = -2 = 2\cdot e^{i\pi}$, cioè $z = \sqrt[3]{2}\cdot\left(\cos\left(\frac{\pi+2k\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{\pi+2k\pi}{3}\right)\right)$

$k=0,1,2$

o se $z=0$, $z=2i$ (cinque soluzioni).

(4) o f e g non sono continue e la prima ~~tipo~~ affermazione <u>non è</u> necessaria:



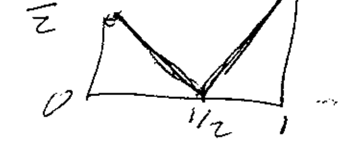
<u>NO</u>

o $f([0,1]) \subseteq [0,2]$, ma g non è definita in $[0,2]$, bensì in $[0,1] \subsetneq [0,2]$:
$g \circ f$ può non essere definita <u>NO</u>
($g \circ f(1) = g(2)$ non è infatti definita).

o $g([0,1]) \subseteq [0, 1/2] \subseteq [0,1]$:
posso definire $f \circ g : [0,1] \to \mathbb{R}$.
se $0 \le x \le y \le 1$, allora $g(x) \ge g(y)$, <u>SI</u>
allora $f(g(x)) \ge f(g(y))$:
$f \circ g$ è decrescente in $[0,1]$

o $(f+g)(0) = 1/2$ e $(f+g)(1) = 2$:
$f+g$ non è decrescente, ma può essere anche non crescente!
P.es. $g(x) = \dfrac{1-x}{2}$ e $f(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } 0 \le x \le 1/2 \\ 4x-2 & \text{se } \frac{1}{2} \le x \le 1 \end{cases}$

$(f+g)(x) = \begin{cases} \frac{1-x}{2} & \text{se } 0 \le x \le 1/2 \\ \frac{7}{2}x - \frac{3}{2} & \text{se } 1/2 \le x \le 1 \end{cases}$



è decrescente in $[0, 1/2]$, p. esempio

2

(5) $h(x) = e^{f(\log(|x+1|))} \qquad x \neq -1$

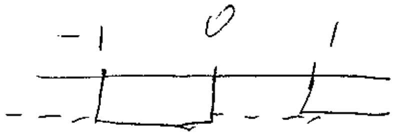
$\Rightarrow h'(x) = e^{f(\log|x+1|)} \cdot f'(\log|x+1|) \cdot \frac{1}{x+1}$

$\Rightarrow h'(-2) = e^{f(0)} \cdot f'(0) \cdot (-1)$

(6) $f(x) = \dfrac{1}{x^3 - x + |x^3 - x| + 1}$ ha dominio $\mathbb{R}$ ed è continua su $\mathbb{R}$.

Osservo che $x^3 - x < 0 \Rightarrow f(x) = \dfrac{1}{x^3 - x + [-(x^3-x)] + 1} = 1$

Ho che $x^3 - x = x(x^2-1) = x(x-1)(x+1) > 0 \Leftrightarrow$



$-1 < x < 0$ o $x > 1$.

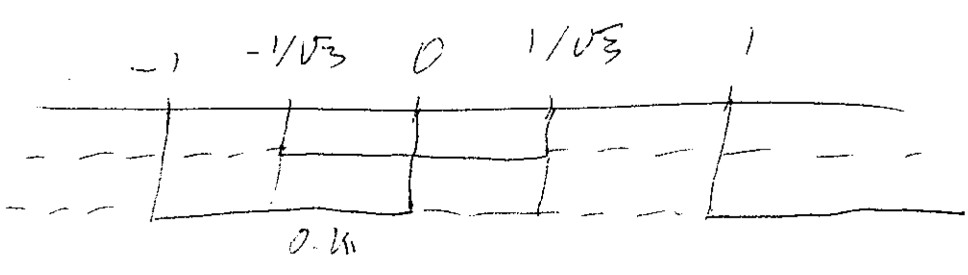
qui, $f \equiv 1$

D'ora in poi, consideriamo $x \in [-1, 0] \cup [1, \infty) = A$

$$f(x) = \frac{1}{2(x^3 - x) + 1} \quad \text{in } A$$

$$f'(x) = \frac{-2 \cdot (3x^2 - 1)}{[2(x^3 - x) + 1]^2} \quad \text{in } A \setminus \{\pm 1, 0\}$$

$$\begin{cases} f'(x) \geq 0 \\ x \in A \setminus \{\pm 1, 0\} \end{cases} \begin{cases} 3x^2 - 1 \leq 0 \\ x \in (-1, 0) \cup (1, \infty) \end{cases} \begin{cases} x \in \left[-\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right] \\ x \in (-1, 0) \cup (1, \infty) \end{cases}$$



f cresce (strettamente) in $[-1/\sqrt{3}, 0]$, decresce (strettamente) in $[-1, -1/\sqrt{3}]$ e in $[1, +\infty)$.

$f'(x) = 0$ se $x \in (-\infty, -1) \cup (0, 1)$.

Poichè sono diversi da 0:

$$\lim_{x\to -1^+} f'(x)\,;\ \lim_{x\to 0^-} f'(x)\,;\ \lim_{x\to 1^+} f'(x),$$

mentre $0 = \lim_{x\to -1^-} f'(x) = \lim_{x\to 0^+} f'(x) = \lim_{x\to 1^-} f'(x)$,

f non è derivabile in $0, 1, -1$.

Dominio$(f') = \mathbb{R} \setminus \{0, 1, -1\}$.

$$\lim_{x\to +\infty} f(x) = 0.$$

Grafico: