

Prova scritta complessiva di Analisi Matematica I

Ingegneria Edile-Architettura, 2009/10

10 settembre 2010

Per essere ammessi prova orale occorre ottenere almeno 15 pt. Negli esercizi a risposta aperta non ci sono punteggi negativi.

Segnare qui un giorno in cui **non** si vuole sostenere la prova orale:.....

(1) [4 pt. se la risposta è esatta, -1 se è errata] Calcolare il limite¹:

$$L = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\frac{1}{1-x} - \frac{1}{1-\sin(x)}}{\frac{x^3}{2} \left[\frac{1}{1-x} + \frac{1}{1-\sin(x)} \right]}$$

- $L = \infty$
- $L = 1$
- $L = 1/6$
- $L = 0$

¹Alcuni sviluppi di Taylor (con $y \rightarrow 0$):

$$\begin{aligned} e^y &= 1 + y + \frac{y^2}{2} + \frac{y^3}{6} + \frac{y^4}{24} + \frac{y^5}{120} \dots \\ \sin(y) &= y - \frac{y^3}{6} + \frac{y^5}{120} + \dots \\ \cos(y) &= 1 - \frac{y^2}{2} + \frac{y^4}{24} + \dots \\ (1-y)^{-1} &= 1 + y + y^2 + y^3 + y^4 + y^5 + \dots \end{aligned}$$

(2) [5 pt.] Calcolare l'integrale:

$$\int_0^{1/2} (x+1)e^x(e^{2x}+1)dx.$$

(3) Sia $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ la funzione definita da

$$f(x) = \left| e^{|x^2-1|} - e \right|.$$

2 pt. Calcolare $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x)$.

1 pt. Calcolare la derivata di f e il suo dominio.

3 pt. Trovare su quali intervalli di \mathbb{R} la funzione f è, rispettivamente, crescente o decrescente.

4 pt. Disegnare il grafico di f .

(4) [4 pt. se la risposta è esatta, -1 se è errata] Sia $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione continua in $[0, 1]$ e derivabile in $]0, 1[$. Supponiamo che $f(1) = f(0) + 2$. Quale delle seguenti affermazioni segue *necessariamente* dalle ipotesi?

- Sia $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definita come $g(x) = f(x) + 2$. Allora esiste $x \in]0, 1[$: $g'(x) = 0$.
- Esiste $x \in]0, 1[$: $f'(x) > 0$.
- Esiste $x \in]0, 1[$: $f'(x) < 0$.
- f è crescente in $[0, 1]$.

(5) [4 pt] Sia $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione derivabile su \mathbb{R} e si definisca, per x in \mathbb{R} ,

$$h(x) = \int_{-1}^x f(t) dt.$$

Calcolare $f'(0)$.

(6) [3 pt] Risolvere in \mathbb{C} l'equazione:

$$(z^5 + 3)(z^2 + 10i + 34) = 0.$$