I prova parziale scritta di Analisi Matematica I

Ingegneria Edile-Architettura, 2009/10

14 novembre 2009

Nota sul punteggio. Per gli esercizi a risposta multipla, il punteggio è di 6 pt. per la risposta esatta, -1.5 pt. per la risposta errata e 0 pt. per la risposta non data. Per essere ammessi alla seconda prova parziale scritta occorre ottenere almeno 15 pt. Negli esercizi a risposta aperta non ci sono punteggi negativi.

(1) [6 pt] Calcolare il seguente limite in $\mathbb{R}$:

$$\lim_{x\to-\frac{5}{3}} \cos(\pi(3x+5))\frac{3x^2+8x+5}{3x^2+2x-5}$$

- $\frac{1}{4}$
- 1
- 0
- $-\frac{1}{4}$

(2) [6 pt] Calcolare il seguente limite di successione:

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\left(4^{2n}+4\right)^{4^{2n+1}}}{\left(4^{2n}+2\right)^{4^{2n+1}}}$$

- 1
- $\frac{4}{3}$
- e^8
- e^2

(3) [6 pt] Siano $f, g : [-1, 1] \to \mathbb{R}$ due funzioni continue; con f decrescente e g crescente. Quale delle seguenti affermazioni segue *necessariamente* dalle ipotesi?

- $f + g$ ha massimo in $]-1, 1]$.
- Se $g(1) < f(1)$, allora esiste $x \in [-1, 1] :\ f(x) = g(x)$.
- Se $g(1) > f(1)$, allora l'equazione $f(x) = g(x)$ non ha soluzioni in $[-1, 1]$.
- $f - g$ ha massimo in $[-1, 1[$.

(4) [7 pt] Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funzione derivabile su $\mathbb{R}$ e si definisca, per x in $\mathbb{R}$,

$$h(x) = \log|3 + 6f(\log(5 + |x|))|$$

Calcolare $f'(x)$.

(5) [5 pt] Risolvere in $\mathbb{C}$ l'equazione:

$$(24 + 7i)z^7 + i = 0.$$

Esercizio facoltativo. Trovare gli intervalli su cui la funzione

$$f(x) = \frac{xe^{-\frac{1}{|x|}}}{x^2 + 1}$$

è definita ed è continua; calcolare i limiti agli estremi di tali intervalli e usare queste informazioni per tracciare un grafico (molto) approssimativo di f.

AM1 Svolgimento.

(1) Osservo che $\lim_{x\to -\frac{5}{3}} \cos(\pi(3x+5)) = \cos(0) = 1$

e che $\lim_{x\to -5/3} (3x^2+8x+5) = 3\cdot\frac{25}{9} - 8\cdot\frac{5}{3} + 5 = \frac{25-40+15}{3}$

e $\lim_{x\to -5/3} (3x^2+2x-5) = 3\cdot\frac{25}{9} - 2\cdot\frac{5}{3} - 5 = \frac{25-10-15}{3} = 0$:

è un limite del tipo $\frac{0}{0}$.

Scompongo $\frac{3x^2+8x+5}{3x^2+2x-5} = \frac{(3x+5)(x+1)}{(3x+5)(x-1)} = \frac{x+1}{x-1}$

e $\lim_{x\to -5/3} \frac{x+1}{x-1} = \frac{-5/3+1}{-5/3-1} = \frac{-2}{-8} = \frac{1}{4}$.

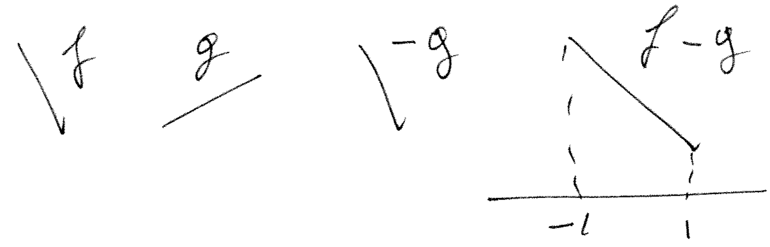
(2) Numeratore e denominatore tendono a $+\infty$: è un limite del tipo $\frac{\infty}{\infty}$. Lo riscrivo:

$$\frac{(4^{2n}+4)^{4^{2n+1}}}{(4^{2n}+2)^{4^{2n+1}}} = \frac{\left[4^{2n}(1+4/4^{2n})\right]^{4^{2n}\cdot 4}}{\left[4^{2n}(1+2/4^{2n})\right]^{4^{2n}\cdot 4}}$$

$$= \frac{(4^{2n})^{4^{2n}\cdot 4}}{(4^{2n})^{4^{2n}\cdot 4}} \cdot \frac{\left[\left(1+\frac{4}{4^{2n}}\right)^{4^{2n}/4}\right]^{4\cdot 4}}{\left[\left(1+\frac{2}{4^{2n}}\right)^{4^{2n}/2}\right]^{4\cdot 2}} \xrightarrow[n\to\infty]{} \frac{e^{16}}{e^{8}} = e^{8}$$

poiché $\frac{4^{2n}}{4} \to +\infty$ e $\frac{4^{2n}}{2} \to +\infty$.

(3) f decresce, g cresce $\Rightarrow$ g decresce $\Rightarrow$ $f-g$ decresce, quindi (senza usare la continuità) $(f-g)(x)$ assume il suo valore massimo in $x=-1 \in [-1,1[$.



(4) $$h'(x) = \frac{\operatorname{sgn}(3+6f(\log(5+|x|))) \cdot 6 \cdot f'(\log(5+|x|)) \cdot \operatorname{sgn}}{|3+6f(\log(5+|x|))| \cdot (5+|x|)}$$

$$= \frac{6 \cdot f'(\log(5+|x|)) \cdot \operatorname{sgn}(x)}{(3+6f(\log(5+|x|))) \cdot (5+|x|)}$$

(5) Riscrivo l'equazione come $(24+7i)\cdot z^7 = -i$

Ora $|24+7i| = \sqrt{24^2+7^2} = 25$, quindi

$$24+7i = 25 \cdot e^{i \operatorname{arctg}(7/24)}$$

mentre $-i = e^{-i\pi/2}$. Quindi cerco z:

$$z^7 = \frac{e^{-i\pi/2}}{25 \cdot e^{i \operatorname{arctg}(7/24)}} = \frac{1}{25} \cdot e^{-i\left[\frac{\pi}{2} + \operatorname{arctg}\left(\frac{7}{24}\right)\right]}$$

cioè,

$$z = \frac{1}{\sqrt[7]{25}} \cdot e^{-i\left[\frac{\pi}{14} + \frac{1}{7}\operatorname{arctg}\left(\frac{7}{24}\right) + \frac{2k\pi}{7}\right]}$$

con $k \in \mathbb{N}$, $0 \le k \le 6$.