Svolgimento

Prova scritta complessiva di Analisi Matematica II

Ingegneria Edile-Architettura, 2009/10

30 giugno 2010

Per essere ammessi prova orale occorre ottenere almeno 15 pt.

Segnare qui un giorno in cui **non** si vuole sostenere la prova orale:...

(1) [10 pt.] Sia $\Omega \subset \mathbb{R}^3$,

$$\Omega = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \ \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} + \leq 1, \ 0 \leq z \leq 1 + \sqrt{\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4}}, \ x \geq 0\}$$

e sia

$$F(x,y,z) = (x,y,z),$$

un campo $F \in C^1(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^3)$.

Disegnare (qualitativamente) Ω e calcolare

$$\iint_{\partial\Omega} F \cdot \nu d\sigma,$$

il flusso di F attraverso il bordo di Ω orientato secondo la normale esterna.

(2) [4 pt.] Trovare l'integrale generale reale di

$$y''(x) + 4y(x) = \sin(4x) + \sin(2x).$$

(3) Sia $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$,

$$f(x, y) = \frac{x}{4x^2 + 9y^2 + 1} + 11$$

3 pt. Trovare i punti critici di f.

3 pt. Classificare i punti critici di f.

1 pt. Determinare le equazioni del *piano tangente* Π e dello spazio tangente T al grafico di f nel punto di coordinate $(2, 0)$.

(4) [5 punti] Calcolare l'integrale

$$\iint_A \sin\left(-4x^2 - 9y^2\right) dxdy,$$

dove

$$A = \{(x,y): \ \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} \leq \frac{\pi}{2}, \ x \geq 0\}.$$

(5) [4 punti] Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funzione $f \in C^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ e si definisca $h : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$,

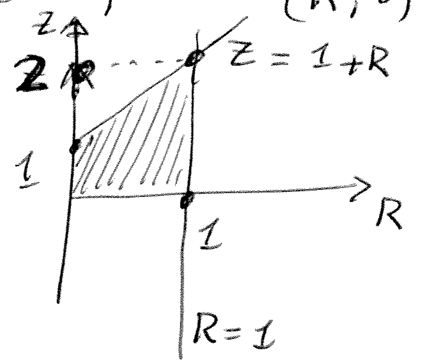
$$h(x,y,z) = Div(-yf(4x^2 + 9y^2), xf(4x^2 + 9y^2), \sin(6z)).$$

Calcolare $h\left(3, 2, \frac{\pi}{4}\right)$

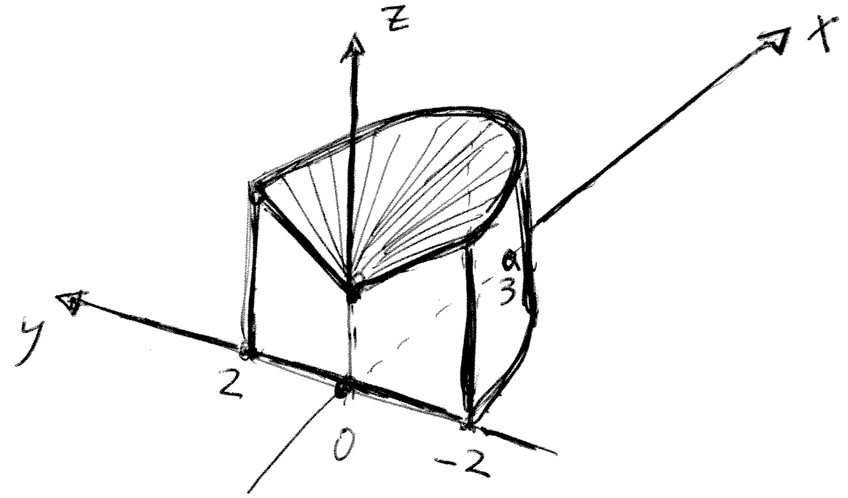
Pongo $R = \sqrt{\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4}} \geq 0$. Ω è definito da:

$$\begin{cases} R^2 \leq 1 \\ 0 \leq z \leq 1 + R \\ x \geq 0 \end{cases}$$

Nel piano (R, z) con $R \geq 0$:



Ruotando, ma tenendo conto del fatto che $x \geq 0$:



Per l'integrale utilizzo il Teorema della divergenza:

$$\iint_{\partial\Omega} F \cdot \nu \, d\sigma = \iiint_{\Omega} \operatorname{div} F \, dx\,dy\,dz = 3 \cdot \iiint_{\Omega} dx\,dy\,dz$$

$= 3 \cdot \text{Volume}(\Omega)$.

$$\operatorname{div} F = \frac{\partial x}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial z} = 3.$$

Scelgo coordinate cilindriche:

$$\begin{cases} \frac{x}{3} = R \cos\theta \\ \frac{y}{2} = R \sin\theta \\ z = z \end{cases}$$

$-\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$ (poiché $x \geq 0$)

$R^2 \leq 1$

$0 \leq z \leq 1 + R$

$R \geq 0$

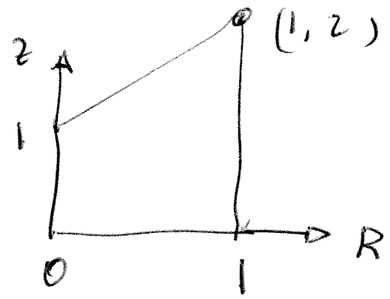
Ho:

$$\left| J \begin{pmatrix} x & y & z \\ R & \theta & z \end{pmatrix} \right| = 6R$$

Quindi:

$$3\cdot Vol(\Omega) = 3\cdot\int_{-\pi/2}^{\pi/2} d\theta \cdot \iint_{\{(R,z):\ 0\le R\le 1,\ 0\le z\le 1+R\}} 6\, R\, dR$$

$$= 18\cdot\pi\cdot\int_0^1 R\,dR\cdot\int_0^{1+R} dz = 18\cdot\pi\cdot\int_0^1 R\cdot(1+R)\,dR$$



$$= 18\cdot\pi\cdot\left(\frac{R^2}{2}+\frac{R^3}{3}\right)_0^1 =$$

$$= 18\cdot\pi\cdot\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\right) = 15\cdot\pi$$

(2) Omogenea Associata: $z''+4z=0$ (EO)

Risolvo $\lambda^2+4=0$ $\lambda=\pm 2i$

$z(x)=A\cos(2x)+B\sin(2x)$ è l'int. gen. di (EO).

Cerco $y=\bar{y}$ t.c. $y''+4y=\sin(4x)$

$\bar{y} = C\cdot\cos(4x)+D\cdot\sin(4x)$. quindi

$$\bar{y}''+4\bar{y} = -4^2C\cdot\cos(4x)-4^2D\cdot\sin(4x)+4C\cdot\cos(4x)+4D\cdot\sin(4x)$$

$$= -12C\cdot\cos(4x)-12\cdot D\cdot\sin(4x) \iff C=0,\ D=-\frac{1}{12}$$

$$\bar{y}(x) = -\frac{1}{12}\cdot\sin(4x)$$

Cerco $y=\bar{\bar{y}}$: $y''+4y=\sin(2x)$

Ho risonanza, quindi cerco

$$\bar{\bar{y}} = x\cdot[C\cos(2x)+D\cdot\sin(2x)]$$

$$\bar{\bar{y}}' = C\cdot\cos(2x)+D\cdot\sin(2x)+x\left[-2C\cdot\sin(2x)+2D\cdot\cos(2x)\right]$$

$$\bar{\bar{y}}'' = -4C\cdot\sin(2x)+4D\cdot\cos(2x)+x\left[-4C\cdot\cos(2x)-4D\cdot\sin(2x)\right]$$

$\bar{\bar{y}}'' + 4\bar{\bar{y}} = -4C \cdot \sin(2x) + 4D \cdot \cos(2x) = \sin(2x)$

$\Longleftrightarrow \cancel{C=0;\ D=1/4}\ D=0;\ C=-\frac{1}{4}$

L'integrale generale è $y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

$y(x) = A\cos(2x) + B\sin(2x) - \frac{1}{12}\cdot\sin(4x) - \frac{x}{4}\cdot\cos(2x)$.

con $A, B \in \mathbb{R}$

(3) $f(x,y) = \dfrac{x}{4x^2+9y^2+1} + 11$

$\partial_x f(x,y) = \dfrac{4x^2+9y^2+1 - 8x\cdot x}{(4x^2+9y^2+1)^2} = \dfrac{9y^2-4x^2+1}{(4x^2+9y^2+1)^2}$

$\partial_y f(x,y) = -\dfrac{18\cdot xy}{(4x^2+9y^2+1)^2}$

P.ti critici: $\begin{cases} 9y^2-4x^2+1=0 \\ xy=0 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} x=0 \\ 9y^2+1=0 \end{cases}$ imp.

o

$\begin{cases} y=0 \\ -4x^2+1=0 \end{cases}$ $\left(\frac{1}{2},0\right)$ $\left(-\frac{1}{2},0\right)$

$\partial_{xx} f(x,y) = \dfrac{-8x\cdot(4x^2+9y^2+1)^2 - (9y^2-4x^2+1)\cdot 2\cdot(4x^2+9y^2+1)\cdot 8x}{(4x^2+9y^2+1)^4}$

$= \dfrac{-8x\left[(4x^2+9y^2+1) - 2\cdot(9y^2-4x^2+1)\right]}{(4x^2+9y^2+1)^3}$

$\partial_{yx} f(x,y) = -\dfrac{18y\cdot(4x^2+9y^2+1)^2 - 18xy\cdot 2\cdot(4x^2+9y^2+1)\cdot 8x}{(4x^2+9y^2+1)^4}$

oss. che $\partial_{yx} f(x,0) = \partial_{xy} f(x,0) = 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$

$\partial_{xx} f(x,0) = \dfrac{-8x\cdot(12x^2 - 1)}{(4x^2+1)^3}$

$$\partial_{yy} f(x,y) = -\frac{18x\cdot(4x^2+9y^2+1)^2 - 18xy\cdot 2\cdot(4x^2+9y^2+1)\cdot 8x}{(4x^2+9y^2+1)^4}$$

$$\partial_{yy} f(x,0) = -\frac{18x\cdot(4x^2+1)^2}{(4x^2+1)^4} = -\frac{18x}{(4x^2+1)^2}$$

$$\mathrm{Hess} f(x,0) = \begin{bmatrix} -\frac{8x\cdot(12x^2-1)}{(4x^2+1)^3} & 0 \\ 0 & \frac{-18x}{(4x^2+1)^2} \end{bmatrix}$$

$$\mathrm{Hess} f\left(\tfrac{1}{2},0\right) = \begin{bmatrix} - & 0 \\ 0 & - \end{bmatrix}$$ p.to di max. rel. in $\left(\frac{1}{2},0\right)$

$$\mathrm{Hess} f\left(-\tfrac{1}{2},0\right) = \begin{bmatrix} + & 0 \\ 0 & + \end{bmatrix}$$ p.to di min. rel. in $\left(-\frac{1}{2},0\right)$

(4) Coordinate ellittiche:

$\frac{x}{3} = R\cos\theta$

$\frac{y}{2} = R\sin\theta$

$R^2 \le \pi/2$

$R \ge 0$

$-\frac{\pi}{2} \le \theta \le \frac{\pi}{2}$

$dx\,dy = 6\,R\,dR\,d\theta$

$$\text{Int.} = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} d\theta \cdot \int_0^{\sqrt{\pi/2}} 6R\,dR\cdot \sin(-R^2)^{36}$$

$$= -6\pi\cdot\int_0^{\sqrt{\pi/2}} \sin(R^2)^{36}\cdot R\,dR$$

$$= -6\pi\cdot\left[-\frac{\cos(R^2)^{30}}{2}\right]_0^{\sqrt{\pi/2}} = -3\pi\cdot\left[1-\cos(\pi/2)^{36}\right]$$

$$= -3\pi\cdot\left[1-\cos(18\cdot\pi)\right] = 0$$

(5) $\frac{\partial}{\partial x} h(x,y,z) = \frac{\partial}{\partial x}\left[-y\, f(4x^2+9y^2)\right]$

$+ \frac{\partial}{\partial y}\left[x\, f(4x^2+9y^2)\right] + \frac{\partial}{\partial z} \sin(6z)$

$= -y \cdot f'(4x^2+9y^2) \cdot 8x + x \cdot f'(4x^2+9y^2) \cdot 18y$

$+ 6 \cdot \cos(6z)$

$= 10xy \cdot f'(4x^2+9y^2) + 6 \cdot \cos(6z).$

(3) Tangente al grafico.

Piano: $z - \left(\frac{1}{8} + 11\right) = \frac{-15}{(17)^2}(x-2)$

Spazio: $z = -\frac{15}{(17)^2} \cdot x$