Prova scritta complessiva di Analisi Matematica II

Ingegneria Edile-Architettura, 2009/10

26 luglio 2010

Per essere ammessi prova orale occorre ottenere almeno 15 pt.

(1) [10 pt.] Sia $\Omega \subset \mathbb{R}^3$,

$$\Omega = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \ z \geq 0, \ x \geq 0, \ x + z \leq 1, \ 0 \leq y \leq 1\}$$

e sia

$$F(x, y, z) = ((z + 1)y, 3y(1 - x)ze^{-z^2}, x + y),$$

un campo $F \in C^1(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^3)$.

Disegnare (qualitativamente) Ω e calcolare

$$\iint_{\partial\Omega} F \cdot \nu d\sigma,$$

il flusso di F attraverso il bordo di Ω orientato secondo la normale esterna.

Calcolare il flusso di F attraverso la parte di bordo di Ω giacente sul piano $z = 0$, orientato secondo la normale *esterna* a Ω.

(2) [4 pt.] Trovare l'integrale generale reale di

$$y''(x) + 9y'(x) = 2\sin(3x)$$

(3) Sia $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$,

$$f(x, y) = y^2 - x^2 - x^2y^2 + x^4 + 3$$

3 pt. Trovare i punti critici di f.

3 pt. Classificare i punti critici di f.

1 pt. Determinare le equazioni del *piano tangente* Π e dello spazio tangente T al grafico di f nel punto di coordinate $(0, 2)$.

(4) [5 punti] Calcolare l'integrale

$$\iint_A x\,dx\,dy,$$

dove

$$A = \{(x,y) :\ -1 \le 2x - 1 \le |y| \le x^2 \le 1\}.$$

(5) [4 punti] Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funzione $f \in C^1(\mathbb{R},\mathbb{R})$ e si definisca $h : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$,

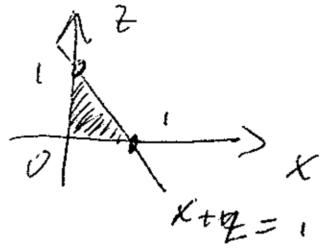
$$h(x,y,z) = (x^2 + y^2 + z^2) \cdot f(x^2 + y^2 + z^2)$$

Calcolare $\nabla h\,(3, e, \pi)$

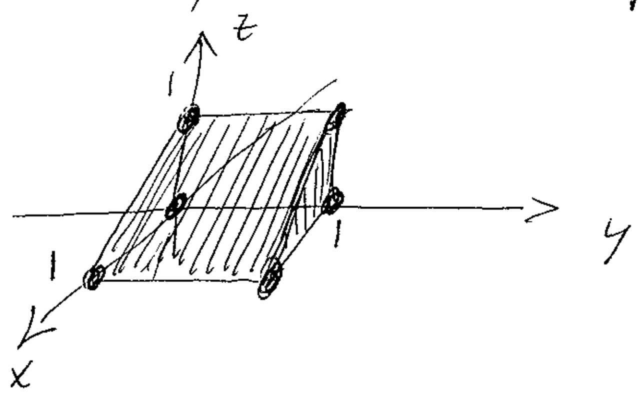
AM 2 20/7/2010 1.

(1) Disegno Ω. Per ogni $y \in [0,1]$:

$\Omega_y = \{(x,z) \in \mathbb{R}^2 : (x,y,z) \in \Omega\}$ ha la forma



Quindi, Ω ha la forma



Per il flusso attraverso $\partial\Omega$ utilizzo il T. della divergenza: $\iint_{\partial\Omega} F \cdot \nu \, d\sigma = \iiint_{\Omega} \operatorname{div} F \; dx\,dy\,dz$

dove $\operatorname{div}(F) = 0 + 3 \cdot (1-x) \cdot z \cdot e^{-z^2} + 0$ Quindi:

$$\iint_{\partial\Omega} F \cdot \nu \, d\sigma = \iiint_{\Omega} 3 \cdot (1-x) \cdot z \cdot e^{-z^2} \, dx\,dy\,dz$$

$$= 3 \cdot \int_0^1 dy \cdot \int_0^1 (1-x)\,dx \cdot \int_0^{1-x} dz \cdot z\, e^{-z^2}$$

$$= 3 \cdot \cancel{\int_0^1 dy} \int_0^1 (1-x)\,dx \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) e^{-z^2}\Big|_{z=0}^{z=1-x}$$

$$= 3 \cdot \cancel{\int_0^1 dy} \int_0^1 \left(-\frac{1}{2}\right)(1-x) \cdot \left[e^{-(1-x)^2} - 1\right] dx$$

$$= \frac{3}{2} \cdot (-1) \left[\frac{e^{-(1-x)^2}}{2} + \frac{(x-1)^2}{2}\right]_{x=0}^{1} =$$

$$= -\frac{3}{4} \cdot \left\{1 - \left[e^{-1} + 1\right]\right\} = \frac{3e^{-1}}{4}$$

Sia A la parte di $\partial\Omega$ giacente su $z=0$:

$A=\{(x,y,0) : 0\le x\le 1 \text{ e } 0\le y\le 1\}$ è un rettangolo. Per $P=(x,y,0)\in A$, la normale esterna è $\nu_P=(0,0,-1)$.

Il flusso di F attraverso A è quindi

$$\iint_A dx\,dy \cdot \big(-(x+y)\big) = -\int_0^1 dy \int_0^1 (x+y)\,dx =$$

$$= -\int_0^1 dy \left(\frac{x^2}{2}+xy\right)_0^1 = -\int_0^1 \left(\frac{1}{2}+y\right)dy = -\frac{1}{2}-\left(\frac{y^2}{2}\right)_0^1$$

$= -1.$

(2) Omogenea associata: $z''+9z'=0$

Polinomio/Equazione caratteristica: $\lambda^2+9\lambda=0$

$\lambda=-9,\ \lambda=0$

Integrale generale dell'omogenea: $z(x)=A+B\cdot e^{-9x}$

Cerco una soluzione particolare $y(x)=\alpha\cos(3x)+\beta\sin(3x)$,

$y'=-3\alpha\sin(3x)+3\beta\cos(3x)$; $y''=-9\alpha\cos(3x)-9\beta\sin(3x)$.

Sostituendo: $2\cdot\sin(3x)=$

$$= [-9\alpha\cdot\cos(3x)-9\beta\sin(3x)]+9\cdot[-3\alpha\cdot\sin(3x)+3\beta\cdot\cos(3x)]$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2=-9\beta-27\cdot\alpha \\ 0=-9\alpha+27\cdot\beta \end{cases} \quad \begin{cases} 6=-90\cdot\alpha \\ \beta=\frac{\alpha}{3} \end{cases} \quad \begin{cases} \alpha=-\frac{1}{15} \\ \beta=-\frac{1}{45} \end{cases}$$

$$y(x)=A+B\cdot e^{-9x}-\frac{1}{15}\cdot\cos(3x)-\frac{1}{45}\cdot\sin(3x); \quad y:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$$

$A,B\in\mathbb{R}$

---

(3) $f(x,y) = y^2 - x^2 - x^2y^2 + x^4 + 3$

$f_x(x,y) = -2x - 2xy^2 + 4x^3 = 2x(-1-y^2+2x^2)$

$f_y(x,y) = 2y - 2yx^2 = 2y(1-x^2)$

$\nabla f(x,y) = 0 \iff \begin{cases} 2y\cdot(1-x^2) = 0 \\ 2x\cdot(-1-y^2+2x^2) = 0 \end{cases} \iff$ (i) o (ii) o (iii)

(i) $\begin{cases} y = 0 \\ x = 0 \end{cases}$ o $\begin{cases} y = 0 \\ x = \pm\frac{1}{\sqrt{2}} \end{cases}$ (ii) $\begin{cases} x = 1 \\ y^2 = 1 \end{cases}$ (iii) $\begin{cases} x = -1 \\ y^2 = 1 \end{cases}$

Ho sette punti critici:

$(0,0)$, $\left(\frac{1}{\sqrt{2}},0\right)$, $\left(-\frac{1}{\sqrt{2}},0\right)$, $(1,1)$, $(-1,1)$, $(1,-1)$, $(-1,-1)$.

$$\mathrm{Hess}f(x,y) = \begin{bmatrix} -2(1+y^2)+12x^2 & -4xy \\ -4xy & 2(1-x^2) \end{bmatrix}$$

Se $x = \pm 1$ e $y \neq 0$, $\det(\mathrm{Hess} f) \neq 0$ e la matrice è $\begin{bmatrix} * & * \\ * & 0 \end{bmatrix}$,
quindi $\det(\mathrm{Hess} f) < 0$: $(\pm 1, 1)$ e $(\pm 1, -1)$ sono pti di <u>selle</u>.

$\mathrm{Hess}f(0,0) = \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$: autovalori -2 e 2 di opposto segno, <u>selle</u> in $(0,0)$

Se $y = 0$ e $x^2 = \frac{1}{2}$: $\mathrm{Hess}f(x,0) = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 1/2 \end{bmatrix}$, che ha autovalori positivi.

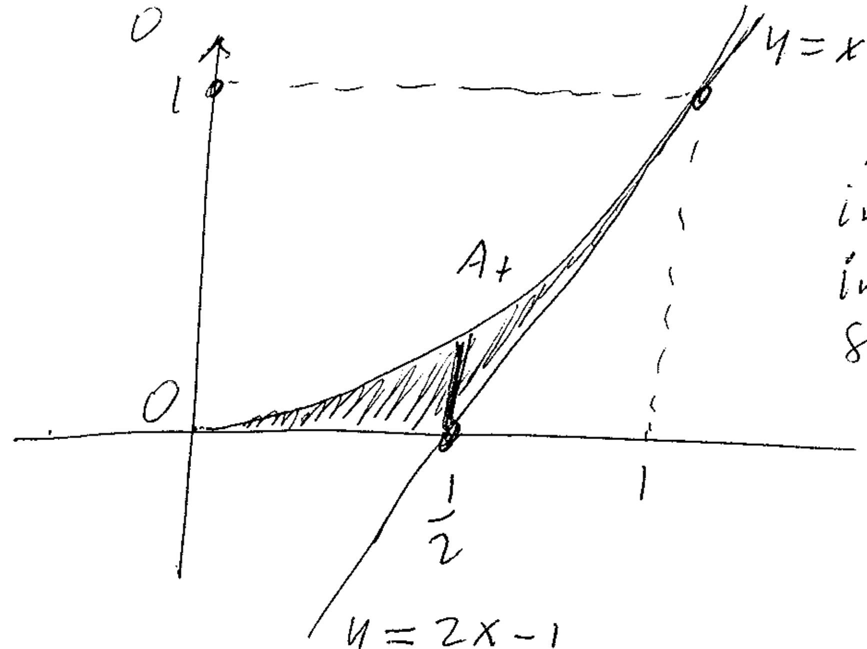
$\left(\pm\frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right)$ sono punti di <u>minimo relativo</u>

Piano tangente: $f(0,2) = 7$; $\nabla f(0,2) = (0,4)$

$z - 7 = 4(y-2)$

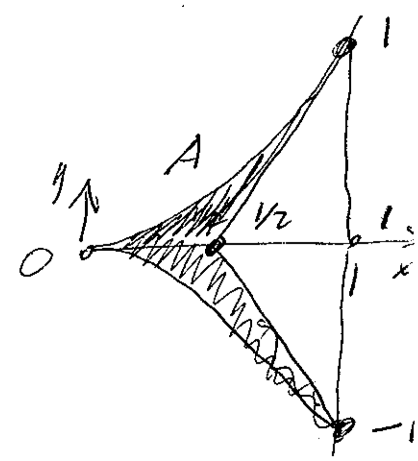
Spazio Tangente: $z = 4y$.

(5) Disegno $A_+ = \{(x,y) : y > 0;\ -1 \le 2x-1 \le y \le x^2 \le 1\}$.



<u>Nota</u>: $y = 2x-1$ interseca $y = x^2$ in $(x,y) = (1,1)$ solamente.

Quindi, A si ottiene riflettendo A_+:



$$\iint_A x\,dx\,dy = 2 \cdot \iint_{A_+} x\,dx\,dy =$$

$$= 2 \cdot \int_0^{1/2} dx \cdot \int_0^{x^2} x\,dy + 2 \cdot \int_{1/2}^{1} dx \int_{2x-1}^{x^2} x \cdot dy =$$

$$= 2 \int_0^{1/2} x^3\,dx + 2 \cdot \int_{1/2}^{1} \left[x^3 - (2x-1)x\right] dx$$

$$= 2\, \frac{x^4}{4}\Big|_0^{1/2} + 2 \cdot \frac{x^4}{4}\Big|_{1/2}^{1} - 2^2 \frac{x^3}{3}\Big|_{1/2}^{1} + 2\, \frac{x^2}{2}\Big|_{1/2}^{1}$$

$$= \frac{1}{2} - \frac{4}{3} + \frac{4}{3} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^3 + 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^2$$

$$= \frac{1}{2} - \frac{4}{3} + \frac{1}{6} + 1 - \frac{1}{4} = \frac{6 - 16 + 2 + 12 - 3}{12} = \frac{1}{12}.$$

(6) $\nabla h(x,y,z) = (2x, 2y, 2z) \cdot \left[f(x^2+y^2+z^2) + (x^2+y^2+z^2) f'(x^2+y^2+z^2) \right.$

(prodotto vettore x scalare). Sostituire $(x,y,z) = (3, e, \pi)$