I prova parziale scritta di Analisi Matematica II

Ingegneria Edile-Architettura, 2009/10

7 novembre 2009

(1) Sia $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$,

$$f(x,y) = 16y^4 - 12x^2y^2 - 4x^4 + 4x^2 - 4y^2 + 1$$

5 pt. Trovare i punti critici di f.

5 pt. Classificare i punti critici di f.

2 pt. Trovare lo sviluppo di Taylor al II ordine di f in $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right)$.

2 pt. Determinare l'equazione del *piano tangente* Π al grafico di f nel punto di coordinate $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right)$ e l'equazione di due rette che giacciono su Π, passanti per il punto di Π avente coordinate $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right)$.

2 pt. Determinare l'equazione dello *spazio tangente* V al grafico di f nel punto di coordinate $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right)$ e una base per esso.

3 pt. Trovare $\max\{f(x,y) : (x,y) \in A\}$, dove $A = \{(x,y) : x^2 + 4y^2 = 2\}$.

2 pt. Trovare l'equazione della retta tangente all'insieme di livello $L_1 = \{(x,y) : f(x,y) = 1\}$ nel punto $(0, 1/2)$.

(2) [5 pt.] Sia $f \in C^1\left(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}\right)$ e poniamo

$$h : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}\,, \qquad h(x,y,z) = x \cdot f\left(yz^2, x^2yz\right) + 2f(z,y).$$

Calcolare $\nabla h\left(x_0, y_0, z_0\right)$.

(3) [4 pt.] Siano $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \ 4 \leq x^2 + y^2 \leq 9, \ xy \leq 0\}$, e sia $f : A \to \mathbb{R}$ una funzione continua. Quali delle seguenti affermazioni segue *necessariamente* da queste ipotesi?

F ● Se esistono punti (x_1, y_1), (x_2, y_2) in A con $f(x_1, y_1) < 0 < f(x_2, y_2)$, allora esiste pure (x,y) in A tale che $f(x,y) = 0$.

F ● Se esiste un punto (x,y) in A tale che $f(x,y) = 0$, allora esistono pure punti (x_1, y_1), (x_2, y_2) in A tali che $f(x_1, y_1) < 0 < f(x_2, y_2)$.

V ● Sia $\varphi : [0,1] \to \mathbb{R}^2$ continua, tale che $\varphi(0)$ ha ascissa positiva e $\varphi(1)$ ha ascissa negativa. Allora, esiste t in $[0,1]$ tale che $\varphi(t) \notin A$.

F ● Sia $\varphi : [0,1] \to \mathbb{R}^2$ continua, tale che $\varphi(0) \in A$ con $f(\varphi(0)) < 0$ e che $\varphi(1) \in A$ con $f(\varphi(1)) > 0$. Allora, esiste t in $[0,1]$ tale che $f(\varphi(t)) = 0$.

AM2 Svolgimento.

(1) $f(x,y) = 16y^4 - 12x^2y^2 - 4x^4 + 4x^2 - 4y^2 + 1$

$f_x(x,y) = -24xy^2 - 16x^3 + 8x = 8x\cdot(-3y^2 - 2x^2 + 1)$

$f_y(x,y) = 64y^3 - 24x^2y - 8y = 8y\cdot(8y^2 - 3x^2 - 1)$

I punti critici sono soluzione di:

$$\begin{cases} x\cdot(3y^2+2x^2-1)=0 \\ y\cdot(8y^2-3x^2-1)=0 \end{cases}$$ che dà i sistemi:

$$\begin{cases} x=0 \\ y=0 \end{cases} \quad \begin{cases} x=0 \\ 8y^2-1=0 \end{cases} \quad \begin{cases} 2x^2-1=0 \\ y=0 \end{cases} \quad \begin{cases} 3y^2+2x^2=1 \\ 8y^2-3x^2=1 \end{cases}$$

$$\downarrow \qquad \downarrow \qquad \downarrow \qquad \downarrow$$

$$(0,0) \quad \left(0, \pm\frac{1}{2\sqrt{2}}\right) \quad \left(\pm\frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right) \quad \begin{cases} 25y^2=5 \\ x^2=y^2 \end{cases} \to \pm\left(\frac{1}{\sqrt{5}}, \frac{1}{\sqrt{5}}\right)$$

$$\pm\left(\frac{1}{\sqrt{5}}, \frac{-1}{\sqrt{5}}\right)$$

Abbiamo nove punti critici.

Calcolo la matrice Hessiana.

$$\begin{bmatrix} f_{xx}(x,y) = -24y^2 - 48x^2 + 8 & f_{xy}(x,y) = -48xy \\ f_{xy}(x,y) = -4xy & f_{yy}(x,y) = 192y^2 - 24x^2 - 8 \end{bmatrix}$$

$\text{Hess} f(0,0) = \begin{bmatrix} 8 & 0 \\ 0 & -8 \end{bmatrix}$: non definita => sella

$\text{Hess} f\left(0, \pm\frac{1}{2\sqrt{2}}\right) = \begin{bmatrix} 8 - 24/8 & 0 \\ 0 & \frac{192}{8} - 8 \end{bmatrix}$: pos. def. => p.ti di min. rel

$\text{Hess} f\left(\pm\frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right) = \begin{bmatrix} 8 - 48/2 & 0 \\ 0 & -8 - 24/2 \end{bmatrix}$: neg. def. => p.ti di MAX. rel.

$\text{Hess} f\left(\pm\frac{1}{\sqrt{5}}, \pm\frac{1}{\sqrt{5}}\right) = \begin{bmatrix} \frac{-24-48+40}{5} = \frac{-32}{5} & \pm\frac{48}{5} \\ \pm 48 & (192-24-40)/5 = 128/5 \end{bmatrix}$

Quindi,

$$H := \text{Hess} f\left(\pm \frac{1}{\sqrt{5}}, \pm \frac{1}{\sqrt{5}}\right) = \frac{16}{5} \cdot \begin{bmatrix} -2 & \pm 3 \\ \pm 3 & 8 \end{bmatrix}$$

e $\det(H) = \left(\frac{16}{5}\right)^2 \cdot (-16-9) < 0$: 4 p.ti di sella.

P.ti di sella: $(0,0)$, $\pm\left(\frac{1}{\sqrt{5}}, \frac{1}{\sqrt{5}}\right)$, $\pm\left(\frac{1}{\sqrt{5}}, \frac{-1}{\sqrt{5}}\right)$

P.ti di min. rel: $\left(0, \pm \frac{1}{2\sqrt{2}}\right)$

P.ti di MAX. rel: $\left(\pm \frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right)$

$$f\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right) = 2$$

$\nabla f\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right) = (0,0)$ perché $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right)$ è critico

$\text{Hess} f\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right) = \begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 24 \end{bmatrix}$ l'avevo già calcolato.

Taylor: $f(x,y) = 2 + \frac{1}{2}\left[5\left(x - \frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 + 24y^2\right] + o\left[\left(x - \frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 + y^2\right]$ $(x,y) \to \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right)$

Piano tangente: $z = 2$

Due rette sul piano tangente: $\begin{cases} x = \frac{1}{\sqrt{2}} \\ z = 2 \end{cases}$ e $\begin{cases} y = 0 \\ z = 2 \end{cases}$

Spazio tangente: $z = 0$ in $\mathbb{R}^3$

Una base: $\{(1,0,0), (0,1,0)\}$

Retta tangente a $L_1 = \{(x,y) : f(x,y) = 1\}$ in $\left(0, \frac{1}{2}\right)$.

Se posso parametrizzare $y = y(x)$, allora

$f(x, y(x)) = 1$, quindi

$$0 = \frac{d}{dx} f(x, y(x)) = f_x(x, y(x)) + y'(x) \cdot f_y(x, y(x)),$$

da cui

$$y'(0) = - \frac{f_x(0, \frac{1}{2})}{f_y(0, \frac{1}{2})} = \text{[illegible]} = - \frac{0}{4} = 0$$

La retta ha equazione $y - \frac{1}{2} = 0 \cdot (x - 0)$, cioè

$$\boxed{y = \frac{1}{2}}$$

Uso Lagrange con $g(x,y) = x^2 + 4y^2 - 2$ per $\max_A f$.

$$\begin{cases} g = 0 \\ f_x = \lambda g_x \\ f_y = \lambda g_y \end{cases} \to \begin{cases} x^2 + 4y^2 = 2 & (a) \\ 8x(-3y^2 - 2x^2 + 1) = 2\lambda x & (b) \\ 8y(8y^2 - 3x^2 - 1) = 8\lambda y & (c) \end{cases}$$

(b) vale per $x = 0$, che sostituita in (a) dà $y = \pm \frac{1}{\sqrt{2}}$

(c) vale per $y = 0$, che sostituita in (a) dà $x = \pm \sqrt{2}$

Non abbiamo la soluzione $(0,0)$, che non soddisfa (a

Se $x \neq 0 \neq y$, allora il sistema diviene (dividendo)

$$\begin{cases} x^2 + 4y^2 = 2 \\ \lambda = 4(-3y^2 - 2x^2 + 1) = -12y^2 - 8x^2 + 4 \\ \lambda = 8y^2 - 3x^2 - 1 \end{cases}$$

cioè,

$$\begin{cases} x^2 + 4y^2 = 2 \\ 8y^2 - 3x^2 - 1 = -12y^2 - 8x^2 + 4 \end{cases} \qquad \begin{cases} x^2 + 4y^2 = 2 \\ 4\cancel{20}y^2 + \cancel{5}x^2 = \cancel{5}\,1 \end{cases}$$

<u>imposs.</u>

I punti candidati a essere di massimo per f su A sono quindi:

$$\left(0, \pm \frac{1}{\sqrt{2}}\right) \text{ e } (\pm\sqrt{2}, 0).$$

$$f\left(0, \pm\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = 4 - 2 + 1 = 3$$

$$f(\pm\sqrt{2}, 0) = -16 + 8 + 1 = -7$$

Abbiamo p.ti di massimo $\left(0, \pm\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ e

$$\mathrm{MAX}\{f(x,y) : (x,y) \in A\} = 3.$$

Sia $f = f(u,v)$

(2) $\partial_x h(x_0,y_0,z_0) = f(y_0 z_0^2, x_0^2 y_0 z_0) + 2x_0^2 y_0 z_0 \cdot \partial_v f(y_0 z_0^2, x_0^2 y_0 z_0)$

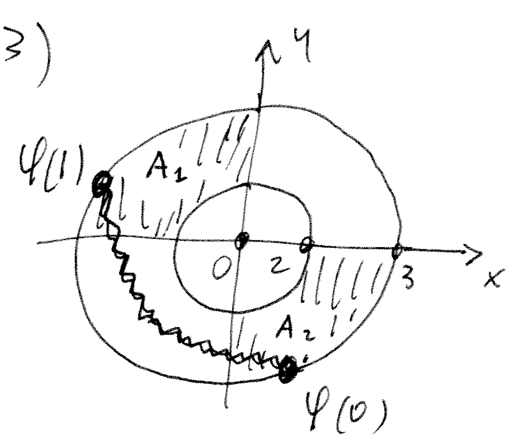
$$\partial_y h(x_0,y_0,z_0) = x_0 \partial_v f(y_0 z_0^2, x_0^2 y_0 z_0) \cdot z_0^2 + x_0^3 \cdot \partial_v f(y_0 z_0^2, x_0^2 y_0 z_0) \cdot z_0$$
$$+ 2 \cdot \partial_v f(z_0, y_0)$$

$$\partial_z h(x_0,y_0,z_0) = x_0 \cdot \partial_u f(y_0 z_0^2, x_0^2 y_0 z_0) \cdot 2y_0 z_0 + x_0^3 \partial_v f(y_0 z_0^2, x_0^2 y_0 z_0) \cdot y_0$$
$$+ 2 \cdot \partial_u f(z_0, y_0)$$

e $\nabla h(x_0,y_0,z_0) = \big(\partial_x h(x_0,y_0,z_0), \partial_y h(x_0,y_0,z_0), \partial_z h(x_0,y_0,z_0)\big).$

---

(3)



La curva φ deve passare da una componente all'altra di A, è continua, quindi deve trovarsi fuori da A in qualche istante.