PROVA SCRITTA DI ANALISI MATEMATICA L-B

Nicola Arcozzi

26 luglio 2010

Cognome e nome (in stampatello):

Il tempo a disposizione é di 2 ore e 30 minuti.
Si viene ammessi alla prova orale con un punteggio superiore o uguale a 10 pt.

(1) [4 punti] Determinare gli $z \in \mathbb{C}$, tali che

$$\left(z^3+2\right)\left(z^2-2iz\right)=0\,.$$

(2)
[3 punti] Sia $f \in C^1\left(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}\right)$ e poniamo

$$h : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}\,, \qquad h(x,y,z) = f(3x^2yz + xz^5, 1).$$

Calcolare $\nabla h\,(x_0, y_0, z_0)$.

(3)
[5 punti] Classificare i punti critici della funzione

$$f(x,y) = y^2 - x^2 - x^2y^2 + x^4 + 3$$

(4)

[4 punti] Calcolare l'integrale generale dell'equazione differenziale

$$y'' + 4y' = \sin(2x).$$

(5)

[5 punti] Calcolare l'integrale doppio

$$\iint_A x dx dy,$$

dove

$$A = \{(x,y) : \ -1 \leq 2x - 1 \leq |y| \leq x^2 \leq 1\}.$$

(6)

[5 punti] Sia

$$A = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \ x^2 + y^2 + \frac{z^2}{9} \leq 9, \ x^2 + y^2 \geq 4\right\}.$$

Se $f \in C(A, \mathbb{R})$, determinare $a, b \in \mathbb{R}$ e $A(z) \subset \mathbb{R}^2$, per ogni $z \in [a,b]$, tali che

$$\int\int\int_A f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz = \int_a^b \left(\int\int_{A(z)} f(x,y,z)\,dx\,dy\right) dz.$$

(7)

[4 punti] Determinare per quali valori del parametro $\gamma \in \mathbb{R}^+$ l'integrale generalizzato

$$\int_0^\infty \frac{x + x^\gamma}{x + x^{3\gamma}} dx$$

converge.

AM-LB 26/7/2010

① $(z^3+2)(z^2-2iz) = (z^3+2)\,z\,(z-2i) = 0$ sse $z=0,\ z=2i$

oppure $z^3+2=0$: $z^3 = -2 = 2\cdot e^{\pi i} \iff z = \sqrt[3]{2}\cdot e^{i\frac{\pi+2k\pi}{3}}$ $(k=0,1,2)$

Soluzioni: $z=0$; $z=2i$; $z=\sqrt[3]{2}\cdot\left[\cos\left(\frac{\pi+2k\pi}{3}\right)+i\sin\left(\frac{\pi+2k\pi}{3}\right)\right]$

con $k=0,1,2$.

② Sia $f = f(u,v)$.

$$\nabla h(x_0,y_0,z_0) = \Big(\partial_u f(3x_0^2y_0z_0 + x_0z_0^5, 1)\cdot(6x_0y_0z_0 + z_0^5),$$
$$\partial_u f(3x_0^2y_0z_0 + x_0z_0^5, 1)\cdot 3x_0^2z_0,$$
$$\partial_u f(3x_0^2y_0z_0 + x_0z_0^5, 1)\cdot(3x_0^2y_0 + 5x_0z_0^4)\Big)$$

③ Vedi soluzioni di An. Mat. 2 nello stesso appello.

④ Omogenea associata: $z''+4z'=0$

Equazione caratteristica: $\lambda^2+4\lambda = \lambda(\lambda+4)=0$ sse $\lambda=0,-4$

I.G. dell'omogenea: $z(x) = A + Be^{-4x}$, con $A,B\in\mathbb{R}$

Soluzione particolare: $y(x) = \alpha\sin(2x) + \beta\cos(2x)$

$y'(x) = 2\alpha\cos(2x) - 2\beta\sin(2x)$; $y''(x) = -4\alpha\sin(2x) - 4\beta\cos(2x)$.

Sostituisco: $\sin(2x) \doteq [-4\alpha\sin(2x) - 4\beta\cos(2x)]$

$+4[2\alpha\cos(2x) - 2\beta\sin(2x)] = \sin(2x)\cdot[-4\alpha-8\beta] + \cos(2x)[-4\beta+8\alpha]$

$$\iff \begin{cases} 1 = -4\alpha-8\beta \\ 0 = 8\alpha-4\beta \end{cases} \quad \begin{cases} 2 = -20\beta \\ \alpha = \beta/2 \end{cases} \quad \begin{cases} \beta = -1/10 \\ \alpha = -1/20 \end{cases}$$

Integrale generale:

$$y(x) = -\frac{1}{10}\cos(2x) - \frac{1}{20}\sin(2x) + A + B\cdot e^{-4x}$$

con $A,B\in\mathbb{R}$; $y:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$

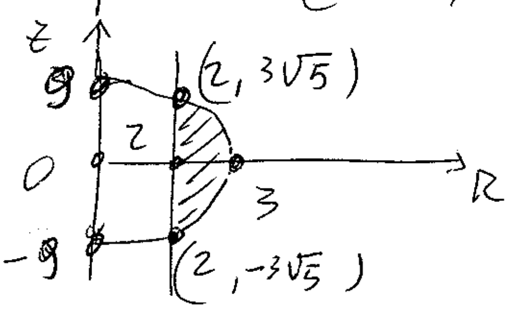
(5) Vedi soluzioni di An. Mat. 2, stesso appello.

(6) Pongo $R = \sqrt{x^2+y^2} \geq 0$, $\begin{cases} x = R\cos\theta \\ y = R\sin\theta \end{cases}$ $\quad 0 \leq \theta < 2\pi$.

Rispetto alle coordinate (R, θ, z), A diventa:

$$A' = \{(R,\theta,z) : R^2 + \frac{z^2}{9} \leq 9 ; \quad R^2 \geq 4 ; \quad R \geq 0\}$$

Poiché nulla dipende da θ, disegno A' nel piano (R, z), con $R \geq 0$:



$$\begin{cases} R = 2 \\ R^2 + \frac{z^2}{9} = 9 \end{cases} \qquad R = 2, \quad z = \pm 3\sqrt{5}$$

Quindi $a = -3\sqrt{5}$, $b = 3 \cdot \sqrt{5}$ e per $|z| \leq 3\sqrt{5}$,

$$A(z) = \{(x, y) : 4 \leq x^2 + y^2 \leq 9 - \frac{z^2}{9}\}$$

(7) Sia $f(x) = \dfrac{x + x^\gamma}{x + x^{3\gamma}}$. Ho le stime asintotiche:

	$0 < \gamma < 1/3$	$\frac{1}{3} < \gamma < 1$	$1 < \gamma$	
$x \to 0^+$	$f(x) \sim \frac{1}{x^{2\gamma}}$ $\boxed{2\gamma < \frac{2}{3}}$	$f(x) \sim \frac{1}{x^{1-\gamma}}$ $\boxed{1-\gamma < 1}$	$f(x) \sim 1$	Nessun problema di convergenza per $x \to 0^+$
$x \to +\infty$	$f(x) \sim 1$	$f(x) \sim \frac{1}{x^{3\gamma-1}}$	$f(x) \sim \frac{1}{x^{2\gamma}}$	

$\frac{1}{3} < \gamma < 1$: voglio $3\gamma - 1 > 1$, $3\gamma > 2$, $\gamma > 2/3$:

$\frac{2}{3} < \gamma < 1$

$1 < \gamma$: voglio $2\gamma > 1$, $\gamma > 1/2$, chiaramente vero

$\gamma > 1$

Anche $\gamma = 1$ va bene, $\gamma = 1/3$ NO

L'integrale converge per $\gamma > \frac{2}{3}$