PROVA SCRITTA DI ANALISI MATEMATICA L-B

Nicola Arcozzi

10 settembre 2010

Cognome e nome (in stampatello):

Il tempo a disposizione é di 2 ore e 30 minuti.
Si viene ammessi alla prova orale con un punteggio superiore o uguale a 10 pt.

(1) [4 punti] Determinare gli $z \in \mathbb{C}$, tali che

$$\left(z^3 - i\right)\left(z^2 - 3(1+i)z3i\right) = 0\,.$$

(2)
[3 punti] Sia $f \in C^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ e poniamo

$$h : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3\,, \qquad h(x,y) = (f(xy), f(x)f(y), xf(y) - yf(x))$$

Calcolare $Jh\,(x_0, y_0)$.

(3)
[5 punti] Sia $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$,

$$f(x,y) = (x^2 - y^2)e^{-x^2-y^2}$$

Trovare e classificare i punti critici di f.

(4)
[4 punti] Trovare l'integrale generale dell'equazione differenziale

$$y''(x) - 4y'(x) = e^{2x} + e^{-2x} + 3x$$

(5)
[5 punti] Calcolare l'integrale doppio

$$I = \int_\Omega (1-2x)dxdy,$$

dove

$$\Omega = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \ 0 \le y \le -x, \ 1 \le x^2+y^2 \le 4\right\}.$$

(6)
[5 punti] Sia

$$A = \{(x,y,z) : \ x^2+y^2 \le 1, \ 0 \le x+z \le 1\}.$$

Se $f \in C(A,\mathbb{R})$, determinare $a, b \in \mathbb{R}$ e $A(z) \subset \mathbb{R}^2$, per ogni $z \in [a,b]$, tali che

$$\int\int\int_A f(x,y,z)\, dx\, dy\, dz = \int_a^b \left(\int\int_{A(z)} f(x,y,z)\, dx\, dy\right) dz.$$

(7)
[4 punti] Determinare per quali valori del parametro $\gamma \in \mathbb{R}^+$ converge l'integrale generalizzato:

$$\int_0^\infty \frac{1+x^\gamma}{x^\gamma + x^3\gamma} dx$$

converge.