

Svolgimento

Prova Scritta di Analisi Matematica LS
Ingegneria Civile

Nicola Arcozzi

30 giugno 2010

Il tempo a disposizione é di 2 ore e 30 minuti. Non si possono utilizzare libri o appunti, eccetto un foglio protocollo formato A4 con formule che si ritengono utili. Si è ammessi alla prova orale con un punteggio di almeno 15/30 punti.

(1) Trovare la soluzione del problema:

$$\begin{cases} u_{xx}(x, t) - 2u_x(x, t) + u_{tt}(x, t) = 0 \text{ per } 0 \leq x \leq \pi, 0 \leq t \\ u(x, 0) = e^x \sin(3x), u_t(x, 0) = 0 \text{ per } 0 \leq x \leq \pi; u(0, t) = u(\pi, t) = 0 \text{ per } 0 \leq t. \end{cases}$$

(2) Trovare la soluzione del problema non omogeneo con condizioni al bordo nulle:

$$\begin{cases} u_{xx}(x, t) - 2u_x(x, t) + u_{tt}(x, t) = e^x \sin(5x) \text{ per } 0 \leq x \leq \pi, 0 \leq t \leq \pi. \\ u(x, 0) = 0, u(x, \pi) = 0 \text{ per } 0 \leq x \leq \pi; u(0, t) = u(\pi, t) = 0 \text{ per } 0 \leq t \leq \pi. \end{cases}$$

(3) Trovare la soluzione del problema di Cauchy:

$$\begin{cases} u_t(x, t) + \frac{2}{13} e^{-13x} t u_x = 4u(x, t) \text{ per } x \in \mathbb{R}, t \geq 0, \\ u(x, 0) = e^{13x} \end{cases}$$

Sviluppiamo:

$$\textcircled{1} \text{ cerca } v(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n(t) \cdot e^x \cdot \sin(nx)$$

poiché $\varphi_n(x) = e^x \cdot \sin(nx)$ soddisfa

$$\varphi_n''(x) - 2\varphi_n'(x) = -(n^2+1) \cdot \varphi_n(x); \quad \varphi_n(0) = \varphi_n(\pi) = 0.$$

Quindi:

$$v_{xx} - 2v_x + v_{tt} = \sum_{n=1}^{\infty} [-(n^2+1)c_n(t) + c_n''(t)] \cdot e^x \sin(nx)$$

$$v(0, t) = v(\pi, t) = 0$$

$$v(x, 0) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n(0) \cdot e^x \cdot \sin(nx) = e^x \cdot \sin(3x)$$

$$\text{sse } c_n(0) = 0 \text{ per } n \neq 3$$

$$c_3(0) = 1$$

$$v_t(x, 0) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n'(0) \cdot e^x \cdot \sin(nx) = 0$$

$$\text{sse } c_n'(0) = 0 \text{ per ogni } n \geq 1.$$

$$\text{Per } n \neq 3, n \geq 1: \begin{cases} c_n''(t) - (n^2+1)c_n(t) = 0 \\ c_n(0) = c_n'(0) = 0 \end{cases}$$

le soluzioni $c_n \equiv 0$.

$$\text{Per } n=3: \quad c_3 = c: \quad \begin{cases} c''(t) - 10 \cdot c(t) = 0 \\ c(0) = 1 \\ c'(0) = 0 \end{cases}$$

$$\lambda^2 - 10 = 0 \quad \lambda = \pm \sqrt{10}$$

$$c(t) = A \cdot e^{\sqrt{10} \cdot t} + B \cdot e^{-\sqrt{10} \cdot t}; \quad c'(t) = \sqrt{10} \cdot (A e^{\sqrt{10} t} - B e^{-\sqrt{10} t})$$

$$\begin{cases} 1 = c(0) = A + B \\ 0 = c'(0) = \sqrt{10} \cdot (A - B) \end{cases} \quad \begin{cases} A = B \\ 2A = \frac{1}{2} \end{cases} \quad \therefore A = B = \frac{1}{2}$$

$$v(x,t) = \frac{1}{2} \cdot (e^{\sqrt{10} \cdot t} + e^{-\sqrt{10} \cdot t}) \cdot e^x \cdot \sin(3x) \quad \underline{2}$$

è la soluzione.

(2) Sempre con $v(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n(t) \cdot e^x \cdot \sin(nx)$,
ho l'equazione

$$\sum_{n=1}^{\infty} [c_n''(t) - (n^2 + 1) \cdot c_n(t)] \cdot e^x \cdot \sin(nx) =$$

$$= v_{xx}(x,t) - 2 \cdot v_x(x,t) + v_{xt}(x,t) = e^x \cdot \sin(5x)$$

che vale sse

$$\begin{cases} c_n''(t) - (n^2 + 1) c_n(t) = 0 & \forall n \neq 5 \\ c_5''(t) - 26 \cdot c_5(t) = 1 \end{cases}$$

Le condizioni $v(0,t) = v(\pi,t) = 0$ vale sempre.

Pongo $c_n(0) = c_n(\pi) = 0 \quad \forall n \geq 1$ per avere

$$v(x,0) = v(x,\pi) = 0.$$

Avrò quindi $c_n \equiv 0 \quad \forall n \neq 5$ e, con $c = c_5$,

$$\begin{cases} c'' - 26 \cdot c = 1 \\ c(0) = c(\pi) = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} z'' - 26 \cdot z = 0 \\ z(t) = A \cdot e^{\sqrt{26} \cdot t} + B \cdot e^{-\sqrt{26} \cdot t} \end{cases}$$

L'integrale generale è

$$c(t) = A \cdot e^{\sqrt{26} \cdot t} + B \cdot e^{-\sqrt{26} \cdot t} - \frac{1}{26}$$

$$\begin{aligned} \text{Se } c &= K \text{ è costante,} \\ -26 \cdot K &= 1 \\ K &= -1/26 \end{aligned}$$

Pongo

$$0 = c(0) = A + B - \frac{1}{26}$$

$$0 = c(\pi) = A \cdot e^{\sqrt{26} \cdot \pi} + B \cdot e^{-\sqrt{26} \cdot \pi} - 1/26$$

$$\begin{cases} A + B = \frac{1}{26} \\ A \cdot e^{\sqrt{26} \pi} + B \cdot e^{-\sqrt{26} \pi} = \frac{1}{26} \end{cases}$$

$$A = \frac{\begin{vmatrix} \frac{1}{26} & 1 \\ \frac{1}{26} & e^{-\sqrt{26} \pi} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ e^{\sqrt{26} \pi} & e^{-\sqrt{26} \pi} \end{vmatrix}} = \frac{1}{26} \frac{e^{-\sqrt{26} \pi} - 1}{e^{-\sqrt{26} \pi} - e^{\sqrt{26} \pi}}$$

$$B = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1/26 \\ e^{\sqrt{26} \pi} & 1/26 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ e^{\sqrt{26} \pi} & e^{-\sqrt{26} \pi} \end{vmatrix}} = \frac{1}{26} \cdot \frac{1 - e^{\sqrt{26} \pi}}{e^{-\sqrt{26} \pi} - e^{\sqrt{26} \pi}}$$

$$v(x, t) = \frac{e^x \sin(5x)}{26} \left[\frac{(1 - e^{-\sqrt{26} \pi}) e^{\sqrt{26} t} + (e^{\sqrt{26} \pi} - 1) e^{-\sqrt{26} t}}{e^{\sqrt{26} \pi} - e^{-\sqrt{26} \pi}} - 1 \right]$$

(3) Se $x = x(t)$, allora

$$\frac{d}{dt} v(x(t), t) = v_x \dot{x} + v_t = v_t + \frac{2}{13} \cdot e^{-13x} \cdot t \cdot v_x$$

$$\Rightarrow \dot{x}(t) = \frac{2}{13} e^{-13x(t)} \cdot t : \text{curve caratteristiche.}$$

$$\text{Risolvo: } \begin{cases} \dot{x}(t) = \frac{2}{13} \cdot e^{-13x(t)} \cdot t \\ x(0) = x_0 \end{cases}$$

$$13 e^{13x(t)} \cdot \dot{x}(t) = 2t$$

$$\int_0^T 13 \cdot e^{13x(t)} \cdot \dot{x}(t) dt = \int_0^T 2t dt = (t^2)_0^T = T^2 \quad \underline{4}$$

$$\int_{x(0)}^{x(T)} 13 \cdot e^{13x} \cdot dx = \left(e^{13x} \right)_{x(0)}^{x(T)} = e^{13x(T)} - e^{13x_0}$$

cioè: $x(T) = \frac{1}{13} \log(T^2 + e^{13x_0})$ è la curva caratteristica per $(x, t) = (x_0, 0)$.

Sia $\varphi(t) = v(x(t), t)$ per tale curva.

$$\begin{cases} \varphi(0) = v(x(0), 0) = v(x_0, 0) = e^{13x_0} \\ \dot{\varphi}(t) = \frac{d}{dt} v(x(t), t) = 4 \cdot v(x(t), t) = 4 \varphi(t) \end{cases}$$

Risolvo: $\varphi(t) = e^{13x_0} \cdot e^{4t}$

Quindi:

$$v(x(t), t) = \varphi(t) = e^{13x_0} \cdot e^{4t} = (e^{13x(t)} - t^2) \cdot e^{4t}$$

cioè

$$\boxed{v(x, t) = (e^{13x} - t^2) \cdot e^{4t}} \quad \text{è la soluzione cercata.}$$