Analisi Matematica M: esercizi per la prova take-home del 24/1/2013.

Richiamo su alcune notazioni.

- $L^1(\mathbb{R})$ contiene le funzioni $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ tali che $\|f\|_{L^1} = \int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)|dx < \infty$.
- $L^2(\mathbb{R})$ contiene le $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ tali che $\|f\|_{L^2} = \left(\int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)|^2 dx\right)^{1/2} < \infty$.
- $L^2([-\pi, \pi])$ contiene le $f : [-\pi, \pi] \to \mathbb{C}$ tali che $\|f\|_{L^2} = \left(\int_{-\pi}^{+\pi} |f(x)|^2 dx\right)^{1/2} < \infty$.
- $\ell^1(\mathbb{Z})$ contiene le successioni "bilatere" $\zeta : \mathbb{Z} \to \mathbb{C}$ con $\|\zeta\|_{\ell^1} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} |\zeta(n)| < \infty$.
- $\ell^2(\mathbb{Z})$ contiene le successioni "bilatere" $\zeta : \mathbb{Z} \to \mathbb{C}$ con $\|\zeta\|_{\ell^2} = \left(\sum_{n=-\infty}^{+\infty} |\zeta(n)|^2\right)^{1/2} < \infty$.
- Se $A : H_1 \to H_2$ è un operatore lineare tra spazi di Hilbert,
$$|||A||| = \sup_{x \neq 0, x \in H_1} \frac{\|Ax\|_{H_2}}{\|x\|_{H_1}} = \sup_{\|x\|_{H_1}=1} \|Ax\|_{H_2} = \sup_{\|x\|_{H_1} \leq 1} \|Ax\|_{H_2}$$
è la sua *norma.*
- Se $f \in L^1(\mathbb{R})$, la sua *trasformata di Fourier* $\hat{f} : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ è definita come
$$\hat{f}(\zeta) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{-i\zeta x} dx.$$
Vale l'importante *formula di Plancherel* (ha anche altri nomi):
$$\int_{-\infty}^{+\infty} |\hat{f}(\zeta)|^2 d\zeta = 2\pi \int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)|^2 dx.$$

Etica.

Sono a conoscenza delle regole etiche per lo svolgimento della prova take-home.

(1) L'elaborato consegnato è frutto sostanzialmente del mio lavoro indivuduale.
(2) È lecito discutere con i miei compagni di corso di strategie e idee generali su come risolvere gli esercizi, ma non passarsi calcoli o soluzioni.
(3) Non è assolutamente permesso ricorrere all'aiuto di persone al di di fuori di chi ha seguito il corso.
(4) È lecito consultare fonti scritte di qualsiasi tipo.

Firmato ....

Svolgere almeno due dei seguenti esercizi. Consegna entro le ore 12 del 24/1/2013.

(1) Siano H uno spazio di Hilbert con prodotto interno $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Sia $T : H \to H$ un operatore lineare limitato.

(i) Per ogni $h \in H$ fissato si definisca $\lambda_h : H \to \mathbb{C}$ mediante

$$\lambda_h(k) = \langle Tk, h \rangle.$$

Mostrare che λ_h è un funzionale lineare limitato su H e determinarne la norma $\|\lambda_h\|_{H^*}$, dove H^* è lo spazio di Hilbert duale di H.

(ii) Mostrare che esiste un unico elemento h' in H tale che

$$\langle Tk, h \rangle = \langle k, h' \rangle.$$

(Suggerimento: Riesz-Fischer aiuta).

(iii) Definire l'**operatore aggiunto** T^* di T, $T^* : H \to H$, come $T^* h = h'$. Mostrare che $T^* : H \to H$ è lineare.

(iv) Mostrare che T^* è limitato e che $|||T^*||| \leq |||T|||$. (Suggerimento: Cauchy-Schwarz aiuta).

(v) Mostrare che $(T^*)^* = T$.

(vi) Dedurne che $|||T||| = |||T^*|||$.

(vi) Sia $k \in L^1(\mathbb{R})$ e si definisca $C_k : L^2(\mathbb{R}) \to L^2(\mathbb{R})$ con

$$Ckf(x) := k * f(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} k(x-y) f(y) dy.$$

Mostrare che C_k è limitato e che $|||C_k||| \leq \|k\|_{L^1(\mathbb{R})}$.

(vii) Sia $\check{k}(x) = \overline{k(-x)}$. Mostrare che

$$(C_k)^* = C_{\check{k}}.$$

(2) Sia $\Delta = \{z \in \mathbb{C} : \ |z| < 1\}$ il disco unitario in $\mathbb{C}$ e per una funzione del tipo

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n, \tag{0.1}$$

dove gli a_n sono numeri complessi, si definisca la *norma di Hardy di* f come

$$\|f\|_{H^2} = \left(\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|^2 \right)^{1/2}. \tag{0.2}$$

Lo spazio H^2 contiene tutte le funzioni f per cui $\|f\|_{H^2} < \infty$.

(i) Mostrare che se f è una funzione in H^2, allora la serie (0.1) converge per ogni $z \in \Delta$. (Suggerimento: utilizzare una serie geometrica).

(ii) Data anche $g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n$, $g \in H^2$, definiamo il prodotto interno

$$< f, g >_{H^2} = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \overline{b_n}. \tag{0.3}$$

Mostrare che H^2 diventa così uno spazio pre-Hilbertiano. (Diamo in seguito per scontato che sia di Hilbert).

(iii) Dato $w \in \Delta$, determinare $K_w \in H^2$:

$$< f, K_w >_{H^2} = f(w) \tag{0.4}$$

per ogni f in H^2 e utilizzare una serie geometrica per mostrare che K_w è una funzione razionale fratta in $\mathbb{C}$.

(iv) Mostrare che

$$\|K_w\|_{H^2}^2 =< K_w, K_w >_{H^2} = \frac{1}{1 - |w|^2}. \tag{0.5}$$

(v) Per $w \in \Delta$, sia $\eta_w : H^2 \to \mathbb{C}$ il funzionale lineare "valutazione in w":

$$\eta_w(f) = f(w). \tag{0.6}$$

Dedurre dalla precedente discussione e dal teorema di Riesz-Fischer che: (a) η_w è limitato, $\eta_w \in (H^2)^*$; (b) $\|\eta_w\|_{(H^2)^*} = \left(\frac{1}{1-|w|^2}\right)^{1/2}$.

(vi) Mostrare che

$$\|f\|_{H^2}^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(e^{i\theta})|^2 d\theta.$$

(3) Sia $\varphi : \Delta \to \mathbb{C}$ olomorfa e limitata:

$$\|\varphi\|_\infty := \sup_{z\in\Delta} |\varphi(z)| < \infty.$$

(i) Mostrare che l'operatore di moltiplicazione $M_\varphi : H^2 \to H^2$ definito da

$$M_\varphi f(z) = \varphi(z) f(z)$$

è limitato e che $|||M_\varphi||| \leq \|\varphi\|_\infty$.

(ii) Sia $M_\varphi^* : H^2 \to H^2$ l'operatore aggiunto di M_φ (vedi esercizio (1)). Sia k_z il nucleo riproducente di H^2 in $z \in \Delta$ (vedi esercizio (2)). Mostrare che

$$\left(M_\varphi^* k_z\right)(w) = \overline{\varphi(z)} k_z(w).$$

(iii) Dedurre da (ii) che

$$\langle M_\varphi^* k_z, k_z\rangle = \overline{\varphi(z)} k_z(w).$$

(iv) Dedurre da (iv) che

$$|||M_\varphi^*||| \geq \|\varphi\|_\infty.$$

(v) Utilizzare anche l'esercizio (1) per dedurre che

$$|||M_\varphi||| = \|\varphi\|_\infty.$$