



Dato la forma del termine noto, cerco soluzioni della forma:

$$v(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n(x) \cdot \sin(ny)$$

$$v_{xx}(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n''(x) \cdot \sin(ny)$$

$$v_{yy}(x, y) = - \sum_{n=1}^{\infty} c_n(x) \cdot n^2 \cdot \sin(ny)$$

Le condizioni
 $v(x, 0) = v(x, \pi) = 0$
 sono soddisfatte

$$\Rightarrow f(x) \cdot \sin(ky) = v_{xx}(x, y) + 4v_{yy}(x, y) =$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} [c_n''(x) - 4n^2 \cdot c_n(x)] \sin(ny)$$

L'equazione $v_{xx} + 4v_{yy} = f(x) \sin(ky)$ vale per $n \neq k$

$$\Leftrightarrow c_n''(x) - 4n^2 \cdot c_n(x) = \begin{cases} 0 & \text{per } n \neq k \\ f(x) & \text{per } n = k \end{cases}$$

Le condizioni al bordo rimanenti sono

$$0 = v(0, y) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n(0) \cdot \sin(ny)$$

$$0 = v(\pi, y) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n(\pi) \cdot \sin(ny)$$

$$\text{e valgo per } \forall y \in [0, \pi] \Leftrightarrow \forall n \geq 1: c_n(0) = c_n(\pi) = 0$$

Abbiamo, per $n \neq k$:

$$\begin{cases} c_n'' - 4n^2 \cdot c_n = 0 \\ c_n(0) = c_n(\pi) = 0 \end{cases}$$

$$\text{cioè, } k \neq n \Rightarrow c_n \equiv 0$$

Per $n = k$:

$$\begin{cases} c_k''(x) - 4k^2 c_k(x) = f(x) \\ c_k(0) = c_k(\pi) = 0 \end{cases}$$

Considero l'anno. l'eq. caratteristica
 associata : $\lambda^2 - 4k^2 = 0$ $\lambda = \pm 2k$
 ($k \geq 1$, intero).

Pongo $c_k(x) = A(x) e^{2kx} + B(x) e^{-2kx}$

$$c_k'(x) = A'(x) e^{2kx} + B'(x) e^{-2kx} \\ + A(x) \cdot 2k \cdot e^{2kx} - B(x) \cdot 2k \cdot e^{-2kx}$$

$$= A(x) \cdot 2k \cdot e^{2kx} - B(x) \cdot 2k \cdot e^{-2kx}$$

Per cui $\boxed{0 = A'(x) \cdot e^{2kx} + B'(x) \cdot e^{-2kx}}$

$$c_k''(x) = A'(x) \cdot 2k \cdot e^{2kx} - B'(x) \cdot 2k \cdot e^{-2kx} \\ + A(x) \cdot 4k^2 \cdot e^{2kx} + B(x) \cdot 4k^2 \cdot e^{-2kx}$$

ossia che, se

$$\boxed{f(x) = A'(x) \cdot 2k \cdot e^{2kx} - B'(x) \cdot 2k \cdot e^{-2kx}}$$

Si ha che $c_k''(x) - 4k^2 \cdot c_k(x) = f(x)$, come voluto.

Risultano : $\begin{cases} A'(x) \cdot 2k \cdot e^{2kx} - B'(x) \cdot 2k \cdot e^{-2kx} = f(x) \\ A'(x) \cdot e^{2kx} + B'(x) \cdot e^{-2kx} = 0 \end{cases}$

$$A'(x) = \frac{\begin{vmatrix} f(x) & -2ke^{-2kx} \\ 0 & e^{-2kx} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2ke^{2kx} & -2ke^{-2kx} \\ e^{2kx} & e^{-2kx} \end{vmatrix}} = \frac{f(x) \cdot e^{-2kx}}{4k}$$

$$B'(x) = \frac{\begin{vmatrix} 2ke^{2kx} & f(x) \\ e^{2kx} & 0 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2ke^{2kx} & -2k \cdot e^{-2kx} \\ e^{2kx} & e^{-2kx} \end{vmatrix}} = \frac{-e^{2kx} f(x)}{4k}$$

$$A(x) = A(0) + \int_0^x f(t) e^{-2kt} dt / 4k$$

$$B(x) = B(0) - \int_0^x f(t) \cdot e^{2kt} dt / 4k$$

In definitiva:

$$c_k(x) = \left[A(0) + \int_0^x f(t) e^{-2kt} \frac{dt}{4k} \right] \cdot e^{2kx}$$

$$(1) + \left[B(0) - \int_0^x f(t) \cdot e^{2kt} \frac{dt}{4k} \right] \cdot e^{-2kx}$$

$A(0)$ e $B(0)$ soddisfanno le condizioni

$$\begin{aligned} (2) \quad & \begin{cases} 0 = c_k(0) = A(0) + B(0) \\ 0 = c_k(\pi) = \left[A(0) + \int_0^\pi f(t) e^{-2kt} \frac{dt}{4k} \right] \cdot e^{2k\pi} \\ \quad + \left[B(0) - \int_0^\pi f(t) \cdot e^{2kt} \frac{dt}{4k} \right] \cdot e^{-2k\pi} \end{cases} \end{aligned}$$

- Risolvere il sistema lineare (2) rispetto alle variabili $A(0)$, $B(0)$;

- Sostituire $A(0)$ e $B(0)$ in (1);

- ho le soluzioni

$$(3) \quad v(x, y) = c_k(x) \cdot \sin(ky),$$

con c_k come in (2).

Es. 3 come in Es. 1, scrivo (sommatoria su x e y)

$$v(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n(y) \sin(nx),$$

$$\text{così che } v(0, y) = v(\pi, y) = 0 \quad \forall y \in [0, \pi].$$

ho che

$$0 = v_{xx}(x, y) + 4 v_{yy}(x, y)$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} [c_n''(y) - 4n^2 c_n(y)] \cdot \sin(nx)$$

$$\Leftrightarrow \forall y \in [0, \pi]: \quad c_n''(y) - 4n^2 c_n(y) = 0 \quad \forall n \geq 1 \text{ intero}$$

~~Trovare la costante delle condizioni~~

Questo ci dà:

$$c_n(x) = A_n e^{2n\pi y} + B_n e^{-2n\pi y}.$$

Quindi,
$$V(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} (A_n e^{2n\pi y} + B_n e^{-2n\pi y}) \sin(nx)$$

Ponendo le condizioni ~~in~~ al bordo:

$$3 \cdot \sin(2x) + 2 \cdot \sin(3x) = V(x, 0) = \sum_{n=1}^{\infty} (A_n + B_n) \cdot \sin(nx),$$

Da cui

$$\begin{cases} A_2 + B_2 = 3 \\ A_3 + B_3 = 2 \\ A_n + B_n = 0 \text{ per } n \neq 2, 3; n \geq 1 \end{cases}$$

e

$$0 = V(x, \pi) = \sum_{n=1}^{\infty} (A_n e^{2n\pi} + B_n e^{-2n\pi}) \cdot \sin(nx),$$

Da cui $A_n e^{2n\pi} + B_n e^{-2n\pi} = 0$ per $n \geq 1$.

Ne segue che $A_n = B_n = 0 \quad \forall n \geq 1, n \neq 2, 3$,

e che

$$\begin{cases} A_2 e^{4\pi} + (3 - A_2) e^{-4\pi} = 0 \\ A_2 + B_2 = 3 \\ A_3 \cdot e^{6\pi} + (2 - A_3) e^{-6\pi} = 0 \\ A_3 + B_3 = 2 \end{cases}$$

Ricavo:

$$A_2 = \frac{-3e^{-4\pi}}{e^{4\pi} - e^{-4\pi}} \quad B_2 = \frac{3e^{4\pi}}{e^{4\pi} - e^{-4\pi}}$$

$$A_3 = \frac{-2e^{-6\pi}}{e^{6\pi} - e^{-6\pi}} \quad B_3 = \frac{2e^{6\pi}}{e^{6\pi} - e^{-6\pi}}$$

e otteniamo

$$V(x, y) = (A_2 e^{4y} + B_2 e^{-4y}) \cdot \sin(2x) + (A_3 e^{6y} + B_3 e^{-6y}) \cdot \sin(3x).$$