17 giugno 2013 - ingegneria gestionale - Proff. Arcozzi - Baldi - Prova totale di Analisi Matematica TA 451726

NOME e COGNOME:... **MATRICOLA:** ....

Orale: NON POSSO MAX UNO (25 matt – 25 pom – 26 matt – 26 pom –27 matt) ....

Intendo sostenere geometria in questo appello?(SI/NO)................ **Rispondere UNICAMENTE su questo foglio**

---

(1) [2 pti] Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funzione conntinua e sia $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la funzione

$$F(x) = \int_0^x f(t)dt.$$

Quale delle seguenti implicazioni *non* è necessariamente vera?

F (a) $F'(0) = 0$.

V (b) $F(0) = 0$.

V (c) Se $f(x) \geq 0$ per ogni x in $\mathbb{R}$, allora F è crescente.

V (d) $F'(x) = f(x)$ per ogni x in $\mathbb{R}$.

(2) [3 pti] Dopo aver calcolato il seguente limite

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\sqrt{n}\ \log\left(\frac{n+1}{n+2}\right)}{\sqrt{n+2}-\sqrt{n+1}},$$

dire quale delle seguenti affermazioni é vera:

V a) il limite é uguale a -2 ;

F b) il limite é uguale a 0 ;

F c) il limite é uguale a $+\infty$;

F d) il limite é uguale a $\log(\frac{1}{2})$;

F e) il limite é uguale a 1 ;

Svolgere gli esercizi seguenti riportando i passaggi principali.

(1) [4 pti] Sia $G : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funzione derivabile tale che $G(\frac{2\pi}{4}) = 12$, $G(2) = 0$, $G'(\frac{2\pi}{4}) = 2$, $G'(2) = 15$. Calcolare la derivata $f'(x)$ nel punto x della funzione

$$f : (0, +\infty) \to \mathbb{R} \quad f(x) = \big(\cos(2x) + 4\big)^{G\left(2+\sin(4x)\right)},$$

e successivamente calcolare $f'\left(\frac{2\pi}{4}\right)$.

$$f(x) = \left(\cos(2x)+4\right)^{G(2+\sin(4x))} \cdot \Big[G'(2+\sin(4x)) \cdot \cos(4x) \cdot 4 \cdot \log(4+\cos(2x))$$
$$- G(2+\sin(4x)) \cdot \frac{2\sin(2x)}{4+\cos(2x)}$$

$$f'\left(\frac{\pi}{2}\right) = 60 \cdot \log(3)$$

(2) [3 pti] Calcolare

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{3\cdot n^2+5\cdot 2^{-n+1}}{7\cdot n^2+11\cdot 2^n}\,. \quad = 0$$

(3) [8 pti] Data la funzione

$$f(x)=\sqrt{4x^2-|x+2|}\,,$$

determinare:

1. il dominio di f e i limiti di f agli estremi del dominio;
2. la derivata di f e il suo dominio;
3. in quali intervalli f è crescente e in quali intervalli f è decrescente;
4. disegnare il grafico qualitativo di f (senza tenere conto di convessità e concavità).

(4) [5 pti] Eventualmente usando gli sviluppi

$$(1+t)^\alpha = 1 + \alpha t + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2}t^2 + \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{2\cdot 3}t^3 + o(t^3), \qquad e^t = 1 + t + \frac{t^2}{2} + \frac{t^3}{2\cdot 3} + o(t^3), \quad t \to 0,$$

a) [4 pti] scrivere lo sviluppo di Taylor con resto di Peano all'ordine 2, centrato in $x = 0$, per la funzione

$$f(x) = e^{\frac{1}{1-6x}}.$$

b) [1 pto] Calcolare il limite

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^{\frac{1}{1-6x}} - e - 6\,e\,x}{x^4 + 2x^2}.$$

$$e^{\frac{1}{1-6x}} = e + 6e\cdot x + 54e\cdot x^2 + \underset{x\to 0}{o(x^2)}$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^{\frac{1}{1-6x}} - e - 6ex}{x^4 + 2x^2} = 27\cdot e$$

(5) [5 pti] Calcolare l'integrale

$$\int_4^8 \frac{1}{x^3} \arctan\left(\frac{1}{4x}\right) dx.$$

Esercizi a risposta multipla

(1) $F(x) = \int_0^x f(t)\,dt \Rightarrow F'(x) = f(x)\ \forall x \in \mathbb{R}$ per T.F.C.I.

$F'(0) = f(0)$: non è detto che sia $f(0) = 0$.

(2) $$\frac{\sqrt{n}\cdot\log\left(\frac{n+1}{n+2}\right)}{\sqrt{n+2}-\sqrt{n+1}} = \frac{\sqrt{n}\cdot(\sqrt{n+2}+\sqrt{n+1})}{(\sqrt{n+2})^2-(\sqrt{n+1})^2}\cdot\log\left(\frac{n+2-1}{n+2}\right)$$

$$= \frac{\sqrt{n}\cdot(\sqrt{n+2}+\sqrt{n+1})}{1}\cdot\log\left(1-\frac{1}{n+2}\right)$$

$$\underset{n\to\infty}{\sim} \sqrt{n}\cdot 2\sqrt{n}\cdot\frac{-1}{n+2} = -2$$

Esercizi a risposta aperta.

(1) $$f(x) = (\cos(2x)+4)^{G(2+\sin(4x))} = e^{G(2+\sin(4x))\cdot\log(4+\cos(2x))}$$

$$\Rightarrow f'(x) = (\cos(2x)+4)^{G(2+\sin 4x)}\cdot\Big[G'(2+\sin(4x))\cdot\cos(4x)\cdot 4\cdot\log(4+\cos(2x))$$

$$+ G(2+\sin(4x))\cdot\frac{-\sin(2x)\cdot 2}{4+\cos(2x)}\Big]$$

$$\Rightarrow f'\left(\frac{2\pi}{4}\right) = f'\left(\frac{\pi}{2}\right) = (\cos(\pi)+4)^{G(2+\sin(2\pi))}\cdot\Big[G'(2+\sin(2\pi))\cdot\cos(2\pi)\cdot 4\cdot\log(4+\cos(\pi))$$

$$+ G(2+\sin(2\pi))\cdot\frac{-\sin(\pi)\cdot 2}{4+\cos(\pi)}\Big]$$

$$= 3^{G(2)}\cdot[G'(2)\cdot 4\cdot\log(3)] = \boxed{60\log(3)}$$

(2) $$\frac{3\cdot n^2+5\cdot 2^{-n+1}}{7\cdot n^2+11\cdot 2^n} = \frac{n^2}{2^n}\cdot\frac{2+5\cdot 2^{-n+1}/n^2}{7\cdot\frac{n^2}{2^n}+11} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0\cdot\frac{2}{11} = 0$$

(3) $f(x) = \sqrt{4x^2 - |x+2|}$

$\text{Dominio}(f) \ni x \iff 0 \le 4x^2 - |x+2| \iff |x+2| \le 4x^2$

$\iff (x+2)^2 \le (4x^2)^2 \iff 0 \le (4x^2)^2 - (x+2)^2 = [4x^2 - (x+2)]\cdot[4x^2 + (x+2)]$

$4x^2 - x - 2 \ge 0 \qquad x = \dfrac{1 \pm \sqrt{1+32}}{8} = \dfrac{1 \pm \sqrt{33}}{8}$

$4x^2 + x + 2 = 0 \qquad \Delta = 1 - 32 < 0$ mai

$x \in \text{Dominio}(f) \iff x \le \dfrac{1-\sqrt{33}}{8}$ o $x \ge \dfrac{1+\sqrt{33}}{8}$

$\forall x \in \text{Dominio}(f) \Rightarrow f(x) \ge 0$ e $f(x) = 0 \iff x = \dfrac{1 \pm \sqrt{33}}{8}$

$\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = +\infty$ e f è continua su Dominio(f).

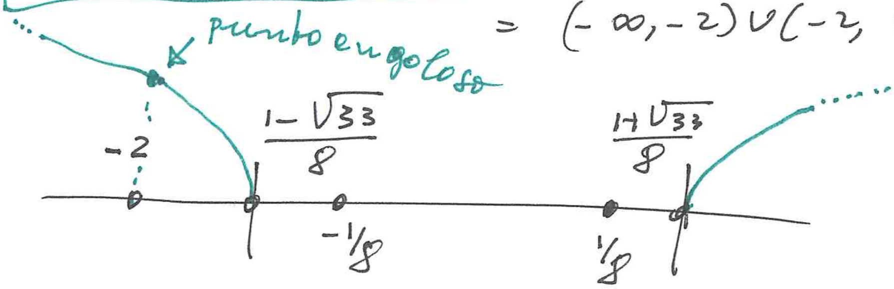
$f'(x) = \dfrac{8x - \text{sgn}(x+2)}{2\sqrt{4x^2 - |x+2|}}$ esiste se $x \ne \dfrac{1 \pm \sqrt{33}}{8}$ e $x \ne -2$.

$\lim_{x \to \frac{1 \pm \sqrt{33}}{8}} f'(x) = \dfrac{1 \pm \sqrt{33} - \text{sign}(x+2)}{0^+} = \pm\infty$

ANALISI SOTTILE DI f'

e $\lim_{x \to -2^+} f'(x) \ne \lim_{x \to -2^-} f'(x)$: Dominio$(f) =$

$= (-\infty, -2) \cup \left(-2, \dfrac{1-\sqrt{33}}{8}\right) \cup \left(\dfrac{1+\sqrt{33}}{8}, +\infty\right)$



$f'(x) > 0 \iff 8x - \text{sgn}(x+2) > 0 \iff \begin{cases} x+2 > 0 \\ 8x - 1 > 0 \end{cases}$ oppure $\begin{cases} x+2 < 0 \\ 8x + 1 > 0 \end{cases}$

$\begin{cases} x > -2 \\ x > 1/8 \end{cases}$ oppure $\begin{cases} x < -2 \\ x > -\frac{1}{8} \end{cases}$

4) $\frac{1}{1-6x} = (1-6x)^{-1} = 1 + 6x + (6x)^2 + \underset{x\to 0}{o}(x^2)$

$e^{\frac{1}{1-6x}} = e^{1+6x+(6x)^2+\underset{x\to 0}{o}(x^2)} = e \cdot e^{6x+(6x)^2+\underset{x\to 0}{o}(x^2)}$

$= e \cdot \left\{ 1 + \left[6x + (6x)^2 + \underset{x\to 0}{o}(x^2)\right] + \frac{1}{2}\left[6x + \underset{x\to 0}{o}(x)\right]^2 + \underset{x\to 0}{o}(x^2) \right\}$

$= e \cdot \left(1 + 6x + 36x^2 + \frac{36}{2}x^2 + \underset{x\to 0}{o}(x^2)\right) =$

$= e + 6e \cdot x + 54e \cdot x^2 + \underset{x\to 0}{o}(x^2)$

$\frac{e^{\frac{1}{1-6x}} - e - 6ex}{x^4 + 2x^2} = \frac{\cancel{e} + \cancel{6e \cdot x} + 54e \cdot x^2 + o(x^2) - \cancel{e} - \cancel{6ex}}{x^2(2+x^2)}$

$\xrightarrow[x\to 0]{} \frac{54 \cdot e}{2} = 27 \cdot e$

5) $\int_4^8 \frac{1}{x^3} \cdot \arctan\left(\frac{1}{4x}\right) dx =$ $\quad t = \frac{1}{4x}$: $x\Big|_4^8 \Leftrightarrow t\Big|_{1/16}^{1/32}$

$dt = -\frac{1}{4x^2} dx$

$= -4 \int_{1/16}^{1/32} 4 \cdot t \cdot \arctan(t)\, dt = 16 \cdot \int_{1/32}^{1/16} t \arctan(t)\, dt$

$= 16 \cdot \left\{ \left[\frac{t^2}{2} \arctan(t)\right]_{1/32}^{1/16} - \int_{1/32}^{1/16} \frac{t^2}{2} \frac{1}{t^2+1}\, dt \right\}$

$= 8 \cdot \left[t^2 \arctan(t)\right]_{1/32}^{1/16} - 8 \int_{1/32}^{1/16} \left(1 - \frac{1}{t^2+1}\right) dt$

$$\boxed{= 8\left[t^2 \cdot \arctan(t)\right]_{1/32}^{1/16} - 8 \cdot \frac{1}{32} + 8\left[\arctan(t)\right]_{1/32}^{1/16}}$$