NOME e COGNOME:..

Prova orale: inizio appello/fine appello (cancellare se non interessa), non nella mezza giornata di..

Intendo sostenere geometria in questo appello?(SI/NO)................ **Risponder UNICAMENTE su questo foglio**

---

(1) [2 pti] Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la funzione:

$$f(x) = \int_7^{\sin(x)} e^{-t^2} t^{14} dt.$$

Calcolare $f'(x)$ e $f'(\pi/4)$.

(2) [2 pti] Sia $f : [-3, 3] \to \mathbb{R}$ una funzione continua e si supponga che $f(-3) > 0 > f(3)$. Quale delle seguenti affermazioni *non* segue *necessariamente* dalle ipotesi su f?

- f non è crescente su $[-3, 3]$.
- Esiste $x \in [-3, 3]$ tale che $x^3 - 27 = f(x)$.
- f è decrescente su $[-3, 3]$.
- Esiste $\epsilon > 0$ tale che, per ogni $x \in [-3, -3 + \epsilon]$ si ha che $f(x) > 0$.

Svolgere gli esercizi seguenti riportando i passaggi principali.

(1) [4 pti] Sia $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funzione derivabile, tale che $g'(15) = \log(7)$, $g'(-16) = \log(16)$, $g'(16) = 7$. Posto

$$h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, h(x) = \arcsin\left(\frac{x^2}{x^2+7}\right) + g\left(7 + \sqrt{|x - 16| + 32}\right),$$

Calcolare $h'(x)$ per ogni $x \in \mathbb{R}$ e successivamente calcolare $h'(-16)$.

(2) [4 pti] Calcolare $\lim_{n\to+\infty} \dfrac{7n + 7n^2 + 36n^3}{\left(\sqrt{(36)^n + 7n^3} - \sqrt{(36)^n - 7n^3}\right)(6^n + \sin(n))}$.

(3) [9 pti] Studiare la funzione

$$f(x) = |x-4| \cdot e^{-|x^2-16|}.$$

- Determinare il dominio di f e gli intervalli su cui f è continua.
- Trovare i limiti di f agli estremi degli intevalli su cui f è continua.
- Trovare la derivata di f e il suo dominio.
- Trovare gli intervalli su cui f è, rispettivamente, crescente e decrescente.
- Tracciare un grafico qualitativo di f in cui tutte queste informazioni siano rappresentate.

(4) [4 pti] Eventualmente usando gli sviluppi

$$\log(1+t) = t - \frac{t^2}{2} + \frac{t^3}{3} + o(t^3) \qquad \cos(t) = 1 - \frac{t^2}{2} + \frac{t^4}{4!} + o(t^4),$$

$$\arctan(t) = t - \frac{t^3}{3} + \frac{x^5}{5} + o(t^5) \qquad \cosh(t) = 1 + \frac{t^2}{2} + \frac{t^4}{4!} + o(t^4) \quad t \to 0\ ,$$

a) scrivere lo sviluppo di Taylor con resto di Peano all'ordine 3, centrato in $x = 0$, per la funzione

$$\arctan(6x - \frac{9}{2}x^2) - 3x - \log(3x+1)\,;)$$

b) calcolare il limite

$$\lim_{x\to 0} \frac{\arctan(6x - \frac{9}{2}x^2) - 3x - \log(3x+1))}{x\log\left(7x + 2\pi\right)\left(\cosh(7x) - \cos(7x)\right)}\ .$$

(5) [5 pti] Calcolare l'integrale

$$\int_7^{13} \frac{\arctan\left(\log\left(\frac{x}{7}\right)\right)}{13x}\,dx\,.$$

AMTA 9/1/2013

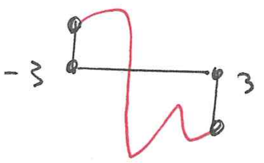
1 T $x \xmapsto{g} \sin(x) = y \xmapsto{h} \int_7^y e^{-t^2}\cdot t^{14}\,dt$ $\qquad f = h\circ g$

$f'(x) = h'(g(x))\cdot g'(x)$

$h'(y) = e^{-y^2}\cdot y^{14}$ per T.F.C.I.

Quindi $f'(x) = e^{-\sin^2(x)}\cdot \sin^{14}(x)\cdot \cos(x)$

2 T



Le ipotesi <u>non</u> implicano che f è decrescente.
Implicano ovviamente che non è crescente.
Per T. zeri implicano che $\exists x\in[-3,3]$ t.c.
$h(x) \overset{\text{df.}}{=} f(x) - x^3 + 27 = 0$: $h(3) = f(3) < 0$; $h(-3) = f(-3) + 54 > 0$

Per T. permanenza ~~del~~ segno implicano che $\exists\varepsilon>0$: $f(x) > 0$ se $x\in[-3, -3+\varepsilon]$.

1 $\dfrac{x^2}{x^2+7} = 1 - \dfrac{7}{x^2+7}$

$$h'(x) = (D\arcsin)\left(1-\frac{7}{x^2+7}\right)\cdot D\left(1-\frac{7}{x^2+7}\right) + (Dg)\left(7+\sqrt{|x-16|+32}\right)\cdot D\left(7+\sqrt{|x-16|+32}\right)$$

$$= \frac{1}{\left\{1-\left(\frac{x^2}{x^2+7}\right)^2\right\}^{1/2}}\cdot\frac{7\cdot 2x}{(x^2+7)^2} + g'\left(7+\sqrt{|x-16|+32}\right)\cdot\frac{\operatorname{sgn}(x-16)}{2\cdot\sqrt{|x-16|+32}}$$

$$= \frac{14x}{\{14x^2+49\}^{1/2}\cdot(x^2+7)} + g'\left(7+\sqrt{|x-16|+32}\right)\cdot\frac{\operatorname{sgn}(x-16)}{2\sqrt{|x-16|+32}}$$

$$h'(-16) = \frac{14\cdot(-16)}{\{14\cdot 16^2+49\}^{1/2}\cdot(16^2+7)} + g'(7+8)\cdot\frac{(-1)}{16}$$

(il dato che serve è quindi $g'(16)$)

2 Sia $\{a_n\}$ la successione di cui calcolo il limite:

$$a_n = \frac{[36n^3+o(n^3)]\cdot\left[\sqrt{36^n+7n^3}+\sqrt{36^n-7n^3}\right]}{[(36^n+7n^3)-(36^n-7n^3)]\cdot[6^n+o(6^n)]}$$

$$= \frac{36n^3\cdot(1+o(1))\cdot\left[\sqrt{(6^n)^2+o(6^n)^2}+\sqrt{(6^n)^2+o(6^n)^2}\right]}{14\cdot n^3\cdot 6^n\cdot(1+o(1))}$$

$$= \frac{36\cdot\cancel{n^3}\cdot(1+o(1))\cdot 2\cdot\cancel{6^n}\cdot(1+o(1))}{14\cdot\cancel{n^3}\cdot\cancel{6^n}\cdot(1+o(1))} \xrightarrow[n\to\infty]{} \frac{36\cdot 2}{14} = \frac{36}{7}$$

(3) $\boxed{\text{Dominio}(f) = \mathbb{R}\ ;\ f \in C(\mathbb{R},\mathbb{R})}$

Se $x-4 \neq 0$ e $x^2-16 \neq 0$ (cioè se $x \in \mathbb{R} \setminus \{4,-4\}$) allora

$$\exists\ f'(x) = \text{sgn}(x-4)\cdot e^{-|x^2-16|} + |x-4|\cdot e^{-|x^2-16|}\cdot\{-\text{sgn}(x^2-16)\}\cdot 2x$$

$$= e^{-|x^2-16|}\cdot\{\text{sgn}(x-4) - |x-4|\cdot\text{sgn}(x^2-16)\cdot 2x\}$$

$$= e^{-|x^2-16|}\cdot\text{sgn}(x-4)\cdot\{1-(x-4)\cdot\text{sgn}(x^2-16)\cdot 2x\}$$

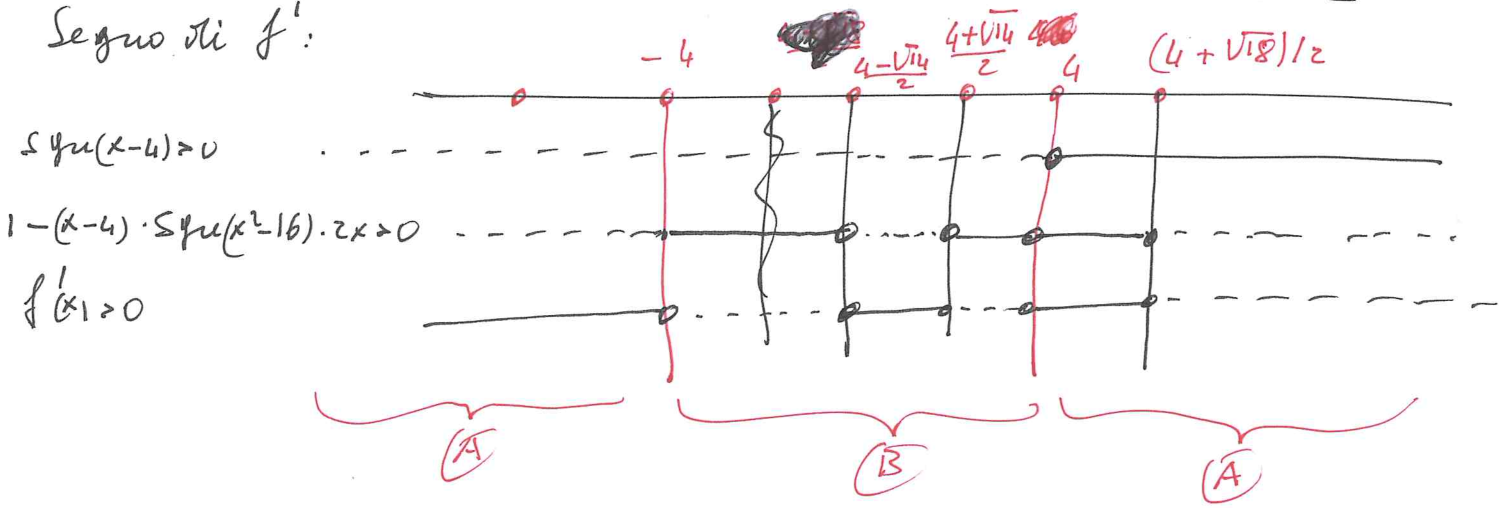
Dominio$(f') \supseteq \mathbb{R}\setminus\{4,-4\}$

$$1-(x-4)\cdot 2x\cdot\text{sgn}(x^2-16) = \begin{cases} 1-(x-4)\cdot 2x & \text{se } x>4 \text{ o } x<-4 \\ 1+(x-4)2x & \text{se } -4<x<4 \end{cases}$$

(A) $\begin{cases} x>4 \text{ o } x<-4 \\ 1-(x-4)2x \geq 0 \end{cases}$ $\begin{cases} x>4 \text{ o } x<-4 \\ 1+8x-2x^2 \geq 0 \end{cases}$ $\begin{cases} x>4 \text{ o } x<-4 \\ \frac{4-\sqrt{18}}{2} \leq x \leq \frac{4+\sqrt{18}}{2} \end{cases}$

(B) $\begin{cases} -4<x<4 \\ 1+(x-4)2x \geq 0 \end{cases}$ $\begin{cases} -4<x<4 \\ 1-8x+2x^2 \geq 0 \end{cases}$ $\begin{cases} -4<x<4 \\ x \geq \frac{4+\sqrt{14}}{2} \text{ o } x \leq \frac{4-\sqrt{14}}{2} \end{cases}$

Segno di f':



f cresce su $(-\infty,-4]$, $\left[\frac{4-\sqrt{14}}{2}, \frac{4+\sqrt{14}}{2}\right]$, $\left[4, \frac{4+\sqrt{18}}{2}\right]$

decresce su $\left[-4, \frac{4-\sqrt{14}}{2}\right]$, $\left[\frac{4+\sqrt{14}}{2}, 4\right]$, $\left[\frac{4+\sqrt{18}}{2}, +\infty\right)$

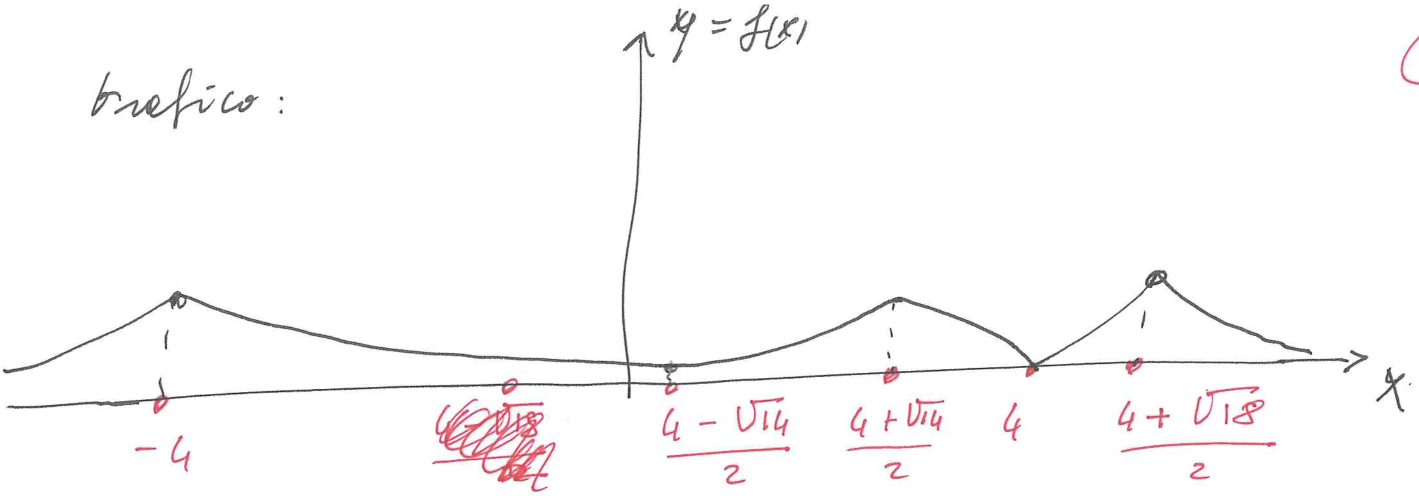
$\boxed{\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = 0}$ (confronto tra ordini di ∞)

$f(x) \geq 0\ \forall x \in \mathbb{R}$ e $f(x)=0 \iff x=4$

f non è derivabile in $x=\pm 4$: $\boxed{\text{Dominio}(f') = \mathbb{R}\setminus\{-4,4\}}$.

3

Grafico:



(4) $\arctan\left(6x - \frac{9}{2}x^2\right) - 3x - \log(1+3x) =$

$$= \left[\left(6x - \tfrac{9}{2}x^2\right) - \frac{1}{3}\left(6x - \tfrac{9}{2}x^2\right)^3 + o(x^3)\right] - 3x - \left[3x - \frac{(3x)^2}{2} + \frac{(3x)^3}{3} + o(x^3)\right]$$

$$= 6x - \tfrac{9}{2}x^2 - \frac{6^3x^3}{3} + o(x^3) - 3x - 3x + \frac{9}{2}x^2 - \frac{3^3}{3}\cdot x^3$$

$$= \left(-\frac{6^3}{3} + \frac{3^3}{3}\right)x^3 + o(x^3) = 9\cdot(-7)x^3 + o(x^3);$$

Lo sviluppo del numeratore è $\boxed{-81\cdot x^3 + o(x^3)}$ per $x \to 0$.

$$\frac{Num(x)}{Den(x)} = \frac{-81\cdot x^3 + o(x^3)}{x\cdot\log(7x+2\pi)\cdot\left[\left(1 + \frac{(7x)^2}{2} + o(x^3)\right) - \left(1 - \frac{(7x)^2}{2} + o(x^3)\right)\right]}$$

$$= \frac{[-63 + o(1)]\cdot x^3}{x\cdot[\log(2\pi) + o(1)]\cdot\left[2\cdot\frac{7^2}{2}\cdot x^2 + o(x^3)\right]}$$

$$= \frac{-81 + o(1)}{[\log(2\pi) + o(1)][7^2 + o(1)]} \to -\frac{81}{7^2\cdot\log(2\pi)} = \boxed{-\frac{81}{49\cdot\log(2\pi)}}$$

(5) $$\int_7^{13} \frac{\arctan(\log(x/7))}{13x}\,dx =$$

$y = \log(x/7) = \log(x) - \log(7)$

$dy = \frac{dx}{x}$ $\quad x\Big|_7^{13} \Rightarrow y\Big|_{\log(1)=0}^{\log(13/7)}$

$$= \frac{1}{13}\int_0^{\log(13/7)} \arctan(y)\,dy \overset{\text{I.P.}}{=} \frac{1}{13}\left\{\Big[y\cdot\arctan(y)\Big]_0^{\log(13/7)} - \int_0^{\log(13/7)} \frac{y}{1+y^2}\,dy\right\}$$

$$= \frac{1}{13}\log\left(\frac{13}{7}\right)\cdot\arctan\left(\log\left(\frac{13}{7}\right)\right) - \frac{1}{13}\frac{1}{2}\Big[\log(1+y^2)\Big]_0^{\log(13/7)}$$

$$= \boxed{\frac{1}{13}\cdot\log\left(\frac{13}{7}\right)\cdot\arctan\left(\log\left(\frac{13}{7}\right)\right) - \frac{1}{26}\log\left(1 + \log^2(13/7)\right)}$$

9 gennaio 2013 - ingegneria gestionale - Proff. Arcozzi - Baldi - Prova totale di Analisi Matematica TA 726323

NOME e COGNOME:..

Prova orale: inizio appello/fine appello (cancellare se non interessa), non nella mezza giornata di...

Intendo sostenere geometria in questo appello?(SI/NO)................ **Rispondere UNICAMENTE su questo foglio**

---

(1) [2 pti] Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la funzione:

$$f(x) = \int_7^{\sin(x)} e^{-t^2} t^{14} dt.$$

Calcolare $f'(x)$ e $f'(\pi/4)$.

(2) [2 pti] Sia $f : [-3, 3] \to \mathbb{R}$ una funzione continua e si supponga che $f(-3) > 0 > f(3)$. Quale delle seguenti affermazioni *non* segue *necessariamente* dalle ipotesi su f?

- f non è crescente su $[-3, 3]$.
- Esiste $x \in [-3, 3]$ tale che $x^3 - 27 = f(x)$.
- f è decrescente su $[-3, 3]$.
- Esiste $\epsilon > 0$ tale che, per ogni $x \in [-3, -3+\epsilon]$ si ha che $f(x) > 0$.

Svolgere gli esercizi seguenti riportando i passaggi principali.

(1) [4 pti] Sia $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funzione derivabile, tale che $g'(15) = \log(7)$, $g'(-16) = \log(16)$, $g'(16) = 7$. Posto

$$h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, h(x) = \arcsin\left(\frac{x^2}{x^2+7}\right) + g\left(7 + \sqrt{|x-16| + 32}\right),$$

Calcolare $h'(x)$ per ogni $x \in \mathbb{R}$ e successivamente calcolare $h'(-16)$.