Prova scritta di Analisi Matematica T-B - gestionali

22 luglio 2011

Nome..**Cognome**.. **Matricola**.................

(1) [**4 pti**] Sia $A = \left\{(x,y) : \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} \leq 1,\ x \geq 0, y \geq 0\right\} \subset \mathbb{R}^2$. Calcolare

$$\iint_A \frac{x+1}{1+\sqrt{\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}}}dxdy.$$

(2) [**8 pti**] Classificare i punti critici di $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x,y) = \left(\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{9} - 1\right)\left(\frac{x}{2} - 2\right) + 1$.

(3) [**4 pti**] Trovare l'integrale generale di $\dot{x} + t \cdot x = te^{-t^2/2}$.

(4) [3 pti] Siano $\varphi \in C^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, e $f \in C^1(\mathbb{R}^3, \mathbb{R})$. Si definisca $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$, $F(x, y, z) = (x\varphi(z), f(x + yz, x, x^2 z))$. Calcolare, per $x \in \mathbb{R}$, $\frac{\partial}{\partial z} F$.

(5) [5 pti] Siano $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ l'insieme

$$\Omega = \left\{ (x, y, z) : \ 0 \le z \le \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} \le 4 - z^2 \right\}.$$

e $f \in C(\Omega, \mathbb{R})$ continua. Trovare $A \subset \mathbb{R}^2$ e, per $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, trovare $\alpha(x, y), \beta(x, y) \in \mathbb{R}$, tali che

$$\iiint_\Omega f(x, y, z) dx dy dz = \iint_A \left[\int_{\alpha(x,y)}^{\beta(x,y)} f(x, y, z) dz \right] dx dy$$

(6) [3 pti]Trovare le soluzioni in $\mathbb{C}$ dell'equazione $z^6 - 3i - 8 = 0$

(7) [3 pti]Di ciascuna delle due seguenti affermazioni, dire se l'affermazione è vera e dare una breve giustificazione della risposta.

(i) Sia $f \in C^1(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$ e sia $\Gamma = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \ 3x - 2y - 1 = 0\}$. Allora, f ha massimo su Γ: esiste $(x_0, y_0) \in \Gamma$ tale che per ogni $(x, y) \in \Gamma$ si ha che $f(x, y) \le f(x_0, y_0)$.

(ii) Siano f e Γ come sopra e sia $\varphi(x, y) = 3x - 2y - 1$, $\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$. Se (x_0, y_0) è un punto di massimo per f su Γ, allora esiste $\lambda \in \mathbb{R}$ tale che $\nabla f(x_0, y_0) = \lambda(3, -2)$.

(1) Pongo $\begin{cases} x/2 = r\cos\theta \\ y/3 = r\sin\theta \end{cases}$ $\Big|$ $\begin{matrix} r \geq 0 \\ |\theta| \leq \pi \end{matrix}$ e ho che $(x,y) \in A \iff$

$\begin{cases} 0 \leq r \leq 1 \\ 0 \leq \theta \leq \pi/2 \end{cases}$. L'integrale diventa ($dx\,dy = 6\,r\,dr\,d\theta$!):

$$6 \cdot \int_0^{\pi/2} d\theta \int_0^1 r\,dr \cdot \frac{r\cos\theta + 1}{1+r} = 6\int_0^{\pi/2} \cos\theta\,d\theta \cdot \int_0^1 \frac{r^2}{1+r}\,dr + 6 \cdot \int_0^{\pi/2} d\theta \cdot \int_0^1 \frac{r}{1+r}\,dr$$

$$= 6 \cdot 1 \cdot \int_0^1 \frac{r + r^2 - r}{1+r}\,dr + 6 \cdot \frac{\pi}{2} \cdot \int_0^1 \frac{1+r-1}{1+r}\,dr$$

$$= 6 \cdot \int_0^1 \left[r - \left(1 - \frac{1}{1+r}\right)\right] dr + 3\pi \cdot \int_0^1 \left(1 - \frac{1}{1+r}\right) dr =$$

$$= 6\left[\left(\frac{r^2}{2}\right)_0^1 - 1 + \left(\log(1+r)\right)_0^1\right] + 3\pi \cdot \left[1 - \left(\log(1+r)\right)_0^1\right] =$$

$$= 6\left[\frac{1}{2} - 1 + \log 2\right] + 3\pi \cdot (1 - \log 2) = 6\log 2 - 3 + 3\pi - 3\pi \log 2$$

(2) $\begin{cases} f_x = \frac{x}{2}\left(\frac{x}{2} - 2\right) + \left(\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{9} - 1\right) \cdot \frac{1}{2} \\ f_y = -\frac{2}{9}y \cdot \left(\frac{x}{2} - 2\right) \end{cases}$ $\Bigg|$ $f_y = 0 \iff y = 0$ o $x = 4$

$$\nabla f(x,y) = 0 \iff \begin{cases} x = 4 \\ 3 - \frac{y^2}{9} = 0 \end{cases} \quad \text{o} \quad \begin{cases} \frac{x^2}{4} - x + \left(\frac{x^2}{4} - 1\right)\frac{1}{2} = 0 \\ y = 0 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x = 4 \\ y = \pm 3\sqrt{3} \end{cases} \quad \text{o} \quad \begin{cases} 3x^2 - 8x - 4 = 0 \left(\iff x = \frac{4 \pm \sqrt{28}}{3}\right) \\ y = 0 \end{cases}$$

P.ti critici: $(4, \pm 3\sqrt{3})$; $\left(\frac{4 \pm 2\sqrt{7}}{3}; 0\right)$

$$f_{xx} = \frac{3}{4}x - 1 \qquad f_{xy} = f_{yx} = -\frac{y}{9} \qquad f_{yy} = -\frac{2}{9}\left(\frac{x}{2} - 2\right)$$

$$\text{Hess} f(4, \pm 3\sqrt{3}) = \begin{bmatrix} * & * \neq 0 \\ * \neq 0 & 0 \end{bmatrix}$$ non def.: $\boxed{\text{punti di sella in } (4, \pm 3\sqrt{3})}$

$$\text{Hess} f\left(\frac{4 \pm 2\sqrt{7}}{3}; 0\right) = \begin{bmatrix} \frac{3}{4}\left(\frac{4}{3} \pm \frac{2}{3}\sqrt{7}\right) - 1 & 0 \\ 0 & -\frac{2}{9} \cdot \left(\frac{4 \pm 2\sqrt{7}}{3 \cdot 2} - 2\right) \end{bmatrix}$$

$f_{xx}\left(\frac{4 \pm 2\sqrt{7}}{3}, 0\right) = \pm \frac{\sqrt{7}}{2}$ mentre $\frac{4 \pm 2\sqrt{7}}{6} - 2 < \frac{10}{6} - 2 < 0$,

quindi $f_{yy}\left(\frac{4 \pm 2\sqrt{7}}{3}, 0\right) > 0$: $\boxed{\begin{matrix} \left(\frac{4 + 2\sqrt{7}}{3}, 0\right)\text{: p.to min. rel.} \\ \left(\frac{4 - 2\sqrt{7}}{3}, 0\right)\text{: p.to di sella} \end{matrix}}$

(3) Una primitiva di $a(t)=t$ è $\int t\,dt = t^2/2$.

L'equazione vale $\iff t\cdot e^{-t^2/2}\cdot e^{t^2/2} \doteq (\dot{x}+t\cdot x)\,e^{t^2/2} = \dot{x}\,e^{t^2/2} + e^{t^2/2}\cdot t\cdot x = (x\cdot e^{t^2/2})^{\cdot}$; cioè $t=(x\cdot e^{t^2/2})^{\cdot}$

$\iff \exists k\in\mathbb{R}:\ x(t)\cdot e^{t^2/2} = \frac{t^2}{2}+k \iff$ $\boxed{\exists k\in\mathbb{R}:\ x(t)=e^{-t^2/2}\left(\frac{t^2}{2}+k\right),\quad x\in C^1(\mathbb{R},\mathbb{R})}$

(4) $\frac{\partial}{\partial z}F(x,y,z) = \left(x\cdot \varphi'(z);\ \frac{\partial}{\partial v}f(x+yz,x,x^2z)\cdot y+\frac{\partial}{\partial w}f(x+yz,x,x^2z)\,x^2\right)$.

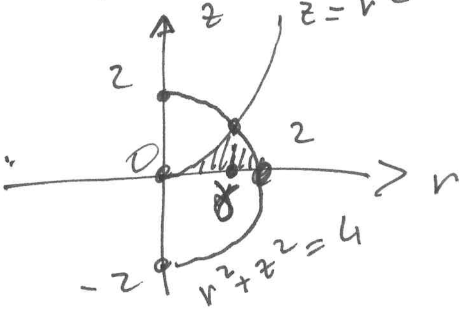
(Ho posto $f=f(u,v,w)$)

(5) Mi aiuto con le coordinate cilindriche di Es. (1):

$$\begin{cases} x/2 = r\cos\theta \\ y/3 = r\sin\theta \\ z = z \end{cases}$$

$(x,y,z)\in R \iff 0\le z\le r^2\le 4-z^2$

$\iff 0\le z;\ z\le r^2;\ r^2+z^2\le 4\ (r\ge 0)$.



$$\begin{cases} z=r^2 \\ r^2+z^2=4 \\ r\ge 0\end{cases}\qquad \begin{cases} r^4+r^2=4 \\ z=r^2 \\ r\ge 0\end{cases}$$

$r^4+r^2-4=0 \qquad r^2=\frac{-1+\sqrt{17}}{2}$

$\gamma = r = \sqrt{\frac{\sqrt{17}-1}{2}}$

$A=\left\{(x,y):\ \frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}\le 4\right\};\ \alpha(x,y)=0;$

$$\beta(x,y)=\begin{cases} \frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9} & \text{se } 0\le \frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}\le \gamma^2 \\ \sqrt{4-\left(\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}\right)} & \text{se } \gamma^2\le \frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}\le 4\end{cases}$$

(6) $z^6=8+3i=R\cdot e^{i\theta}$ con $R=\sqrt{8^2+3^2}=\sqrt{73}$

e $\theta=\operatorname{arctg}(3/8)$ (poiché $8>0$).

$$z=\sqrt[12]{73}\cdot\left[\cos\left(\frac{1}{6}\left(\operatorname{arctg}\left(\frac{3}{8}\right)+2k\pi\right)\right)+i\cdot\sin\left(\frac{1}{6}\left(\operatorname{arctg}\left(\frac{3}{8}\right)+2k\pi\right)\right)\right]$$

con $k=0,1,2,3,4,5$

(7) (i) Falso: Γ è una retta, non limitata, Weierstrass non funziona (p.es. $f(x,y)=x$ non ha MAX su Γ).

(ii) Vero: T. Moltiplicatori di Lagrange + $\nabla(3x-2y-1)=(3,-2)$.