16 luglio 2013 - ingegneria gestionale - Proff. Arcozzi - Baldi - prova totale Analisi Matematica TA □◇♡▽♯♭

NOME e COGNOME:.. **MATRICOLA:** ....

Orale il giorno 23/7/2013

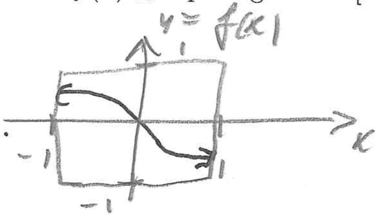
Rispondere UNICAMENTE su questo foglio

---

(1) [2 pti] Sia $f : [-1, 1] \to \mathbb{R}$ una funzione continua tale che $-1 \le f(x) \le 1$ per ogni x in $[-1, 1]$. Quale delle seguenti implicazioni *non* è necessariamente vera?

✓ (a) Esiste x in $[-1, 1]$ tale che $f(x) = x$.

F (b) La funzione f ha un punto di massimo in $(-1, 1]$. p.es.



✓ (c) Esiste $L = \lim_{x\to 1} f(x)$ e $L \le 1$.

✓ (d) Sia $F(x) = \int_0^x f(t)dt$, $F : [-1, 1] \to \mathbb{R}$. Allora, $-1 \le F(x) \le 1$ per ogni x in $[-1, 1]$.

(2) [2 pti] Sappiamo che, se $\lim_{n\to+\infty} \epsilon_n = 0$, allora $\lim_{n\to+\infty}(1 + \epsilon_n)^{1/\epsilon_n} = e$. Utilizzando, se serve, questo risultato, per calcolare il seguente limite

$$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{n^2+1}{n}\right)^{\frac{n}{2}},$$

dire quale delle seguenti affermazioni é vera:

a) il limite é uguale a $\sqrt{e}$;

b) il limite é uguale a 0;

✓ c) il limite é uguale a $+\infty$;

d) il limite é uguale a 1;

$$\frac{n^2+1}{n} = n + \frac{1}{n} \xrightarrow[n\to\infty]{} +\infty \quad e \quad \infty^{\infty} = \infty .$$

Svolgere gli esercizi seguenti riportando i passaggi principali.

(1) [4 pti] Sia $g : \mathbb{R} \to]0, +\infty[$ una funzione derivabile tale che $g(2) = \sqrt{2}$, $g(0) = 3$, $g'(2) = 3$, $g'(0) = \sqrt{17}$. Calcolare la derivata $f'(x)$ nel punto x della funzione $f(x) = \dfrac{\sqrt{x^2+2x+1}}{g(5x^3+\sin(3x)+2)}$ e successivamente calcolare $f'(0)$.

$$f'(x) = \frac{\frac{2x+1}{2\sqrt{x^2+2x+1}} \cdot g(5x^3+\sin(3x)+2) - \sqrt{x^2+2x+1} \cdot g'(5x^3+\sin(3x)+2) \cdot (15x^2+3\cos(3x))}{g(5x^3+\sin(3x)+2)^2}$$

$$f'(0) = \frac{1/2\, g(2) - g'(2)\cdot 3}{g(2)^2} = \frac{\frac{1}{2}\cdot\sqrt{2} - 3\cdot 3}{\sqrt{2}^2} = \frac{1}{2\sqrt{2}} - \frac{9}{2}$$

(2) [8 pti] Data la funzione

$$f(x) = \arctan\left(e^{\frac{x^2+2}{x}}\right),$$

determinare:

vedi sotto

- il dominio di f e gli intervalli su cui f è continua;
- i limiti di f agli estremi degli intervalli su cui f è continua;
- la derivata f' di f e il dominio di f';
- gli intervalli su cui f è, rispettivamente, crescente o decrescente;
- i punti di massimo e di minimo relativo;
- grafico qualitativo di f riportante le caratteristiche di f trovate sopra.

$$t=\sqrt{1+2x^2}\ ;\ dt=\frac{4x}{2\sqrt{1+2x^2}}\,dx$$

(3) [6 pti] Calcolare

$$\int_0^3 \frac{x\,(3+2x^2)}{\sqrt{1+2x^2}}\log(1+2x^2)\,dx. \stackrel{\Downarrow}{=} \frac{1}{2}\int_1^{\sqrt{19}}(2+t^2)\log(t^2)\,dt$$

$$=\left[\frac{2}{2}\left(2t+\frac{t^3}{3}\right)\log(t)\right]_1^{\sqrt{19}}-\int_1^{\sqrt{19}}\left(2t+\frac{t^3}{3}\right)\frac{1}{t}\,dt$$

$$=\left[\left(2t+\frac{t^3}{3}\right)\log(t)\right]_1^{\sqrt{19}}-\left[2t+\frac{t^3}{9}\right]_1^{\sqrt{19}}$$

(4) [3 pti] Calcolare

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{n^4-6^{n-4}+7\cdot 5^n-4n^4\cdot n^5}{10\cdot 5^{n+1}+5\,n^8+12\cdot 6^{n-1}}.$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{-6^{-4}\cdot 6^n+o(6^n)}{12\cdot 6^{-1}\cdot 6^n+o(6^n)}=-\frac{1}{12\cdot 6^3}$$

(5) [5 pti] Eventualmente usando gli sviluppi $(1+y)^\alpha=1+\alpha y+\frac{\alpha(\alpha-1)}{2}y^2+\frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{6}y^3+o(y^3)$

$$e^y=1+y+\frac{y^2}{2}+\frac{y^3}{6}+o(y^3),\qquad \tan(y)=y+\frac{y^3}{3}+o(y^3),\qquad \sin(y)=y-\frac{y^3}{6}+o(y^3)\qquad y\to 0$$

a) Scrivere lo sviluppo di Taylor con resto di Peano all'ordine 3, centrato in 0, per la funzione $f(x)=e^{\tan(8x)}$;

b) successivamente, calcolare il limite

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin(x^3+7x^5)\tan(3x+7)}{\left((1+x)^8-e^{\tan(8x)}+\frac{8}{2}x^2\right)}.$$

$$e^{\tan(8x)}=1+\tan(8x)+\frac{\tan^2(8x)}{2}+\frac{\tan^3(8x)}{6}+o(x^3)$$

$$=1+8x+\frac{(8x)^3}{3}+\frac{1}{2}(8x)^2+\frac{(8x)^3}{6}+o(x^3)$$

$$=1+8x+\frac{8^2}{2}\cdot x^2+8^3\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{6}\right)x^3+o(x^3)$$

$$=1+8x+\frac{8^2}{2}x^2+\frac{8^3}{2}x^3+o(x^3)$$

$$f(x)\underset{x\to 0}{\sim}\frac{x^3\cdot\tan(7)}{\left(1+8x+\frac{8\cdot 7}{2}x^2+\frac{8\cdot 7\cdot 6}{2\cdot 3}\cdot x^3\right)-\left(1+8x+\frac{8^2}{2}x^2+\frac{8^3}{2}x^3\right)+\frac{8}{2}x^2}$$

$$=\frac{x^3\cdot\tan(7)}{\left(\frac{8\cdot 7\cdot 6}{2\cdot 3}-\frac{8^3}{2}\right)x^3}\xrightarrow[x\to 0]{}\frac{\tan(7)}{56-256}=-\frac{\tan(7)}{200}$$

Es. 2 $\quad f(x) = \arctan\left(e^{(x^2+2)/x}\right) = \arctan\left(e^{x+2/x}\right)$

Dominio $(f) = \mathbb{R} \setminus \{0\}$ e $\quad f \in C^1(\mathbb{R} \setminus \{0\}; \mathbb{R})$

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \arctan(+\infty) = \pi/2 = \lim_{x \to 0^+} f(x)$$

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \arctan(0) = 0 = \lim_{x \to 0^-} f(x)$$

$$f(x) > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$$

$$f'(x) = \frac{1}{\left(e^{x+2/x}\right)^2 + 1} \cdot e^{x+2/x} \cdot \left(1 - \frac{2}{x^2}\right)$$

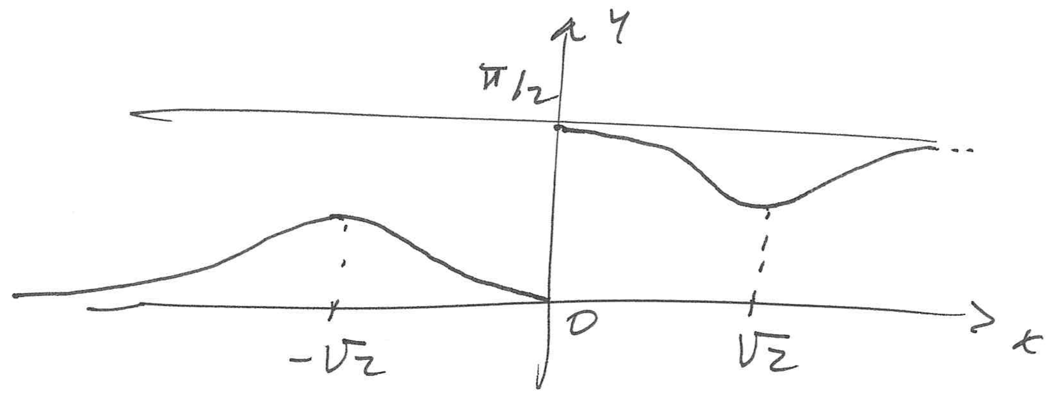
$f'(x) \geq 0 \iff x \neq 0$ e $\quad x^2 - 2 \geq 0 \iff x \geq \sqrt{2}$ o $x \leq -\sqrt{2}$

f cresce su $(-\infty, -\sqrt{2}]$, $[\sqrt{2}, +\infty)$

decresce su $[-\sqrt{2}, 0)$, $(0, \sqrt{2}]$

$x = -\sqrt{2}$: p.to MAX. rel

$x = +\sqrt{2}$: p.to min. rel.



Prova scritta di Analisi Matematica II (16/7/2013)

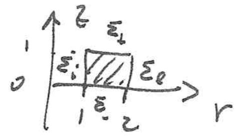
Nome..Cognome.. Matricola.................
non nella mezza giornata di...

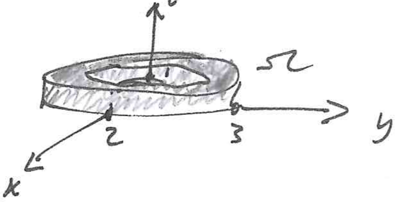
$$\begin{cases} \frac{x}{2} = r\cos\theta \\ \frac{y}{3} = r\sin\theta \\ z = z \end{cases} \qquad \begin{cases} r \ge 0 \\ |\theta| \le \pi \\ z \in \mathbb{R} \end{cases}$$

(1) **[14 pti]** Sia $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ l'insieme $\Omega = \left\{(x,y,z):\ 1 \le \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} \le 4;\ 0 \le z \le 1\right\}$.

(1.1) Fare un disegno *qualitativo* di Ω.

$(x,y,z) \in \Omega \iff 1 \le r \le 2,\ 0 \le z \le 1;\ |\theta| \le \pi$





(1.2) Parametrizzare $\partial\Omega$ e dire se le parametrizzazioni scelte sono o meno compatibili con il campo ν normale a $\partial\Omega$ esternamente a Ω.

$\Sigma_+ = \{(x,y,1): 1 \le \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} \le 4\} \subseteq \mathbb{R}^3;\ \mathbb{R}^2 \supseteq A_+ = \{(x,y): 1 \le \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} \le 4\} \xrightarrow{\Phi_+} \mathbb{R}^3,\ \Phi_+(A_+) = \Sigma_+$

$\Phi_+(x,y) = (x,y,1);\ \partial_x \Phi_+ \times \partial_y \Phi_+ = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = (0,0,1)$: compatibile

$\Sigma_- = \{(x,y,0): 1 \le \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} \le 4\} \subseteq \mathbb{R}^3;\ \mathbb{R}^2 \supseteq A_- = A_+ \xrightarrow{\Phi_-} \mathbb{R}^3;\ \Phi_-(A_-) = \Sigma_-;\ \Phi_-(x,y) = (x,y,0)$

$\partial_x \Phi_- \times \partial_y \Phi_- = (0,0,1)$: non compatibile

$\Sigma_e = \{(x,y,z): 0 \le z \le 1;\ x^2/4 + y^2/9 = 4\};\ \mathbb{R}^2 \supseteq A_e = [-\pi,\pi] \times [0,1] \xrightarrow{\Phi_e} \mathbb{R}^3;\ \Phi_e(A_e) = \Sigma_e;\ \Phi_e(\theta,z) = (4\cos\theta, 6\sin\theta, z)$

$\partial_\theta \Phi_e \times \partial_z \Phi_e(\theta,z) = \begin{vmatrix} i & j & k \\ -4\sin\theta & 6\cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = (6\cos\theta, 4\sin\theta, 0)$: $\partial_\theta \Phi_e \times \partial_z \Phi_e(0,z) = (6,0,0)$: compatibile

(1.3) Sia $F \in C^1(\Omega, \mathbb{R}^3)$ un campo vettoriale. Scrivere *una* formula esplicita che dia il flusso $\iint_{\partial\Omega} F \cdot \nu d\sigma$ di F attraverso $\partial\Omega$. (Nella formula devono apparire, magari iterati, solo integrali di una variabile).

$\Sigma_i = \{(x,y,z): 0 \le z \le 1;\ \frac{x^2}{4} + y^2/9 = 1\};\ \mathbb{R}^2 \supseteq A_i = A_e \xrightarrow{\Phi_i} \mathbb{R}^3;\ \Phi_i(A_i) = \Sigma_i;\ \Phi_i(\theta,z) = (2\cos\theta, 3\sin\theta, z)$

$\partial_\theta \Phi_i \times \partial_z \Phi_i(\theta,z) = (3\cos\theta, 2\sin\theta, 0)$: non compatibile.

Uso T. div. $dx\,dy\,dz = 6r\,dr\,d\theta\,dz$:

$$\iint_{\partial\Omega} F \cdot \nu\, d\sigma = \int_{-\pi}^{\pi} d\theta \int_0^1 dz \int_1^2 6r\,dr\ \mathrm{div}F(2r\cos\theta, 3r\sin\theta, z)$$

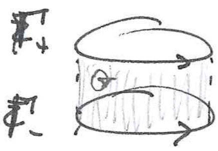
(1.4) Calcolare il flusso di cui al punto (1.4) quando $F(x,y,z) = \left(-y, x, e^{z \cdot \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9}}\right)$. Nel caso:

$$\int_{-\pi}^{\pi} d\theta \int_0^1 dz \int_1^2 6r\,dr\ e^{zr^2} \cdot r^2 = 2\pi \cdot \int_1^2 6r^3 \left[\frac{e^{zr^2}}{r^2}\right]_{z=1}^{z=2} dr = 2\pi \cdot \int_1^2 6r^3 \left(e^{2r^2} - e^{r^2}\right) dr$$

$$= 6\pi \cdot \int_1^4 t(e^{2t} - e^t)\,dt = 6\pi \cdot \left\{\left[\left(\frac{e^{2t}}{2} - e^t\right)t\right]_1^4 - \int_1^4 \left(\frac{e^{2t}}{2} - e^t\right)dt\right\} = 6\pi \left\{\left[\left(\frac{e^{2t}}{2} - e^t\right)t\right]_1^4 - \left[\frac{e^{2t}}{4} - e^t\right]_1^4\right\}$$

(1.5) . Sia $\Sigma = \left\{(x,y,z):\ 1 = \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9};\ 0 \le z \le 1\right\}$. Parametrizzare $\partial\Sigma$ e dire se le parametrizzazioni scelte sono compatibili con la normale ν a Σ (ν essendo la normale di cui al punto (1.2)).

$\Sigma = \Sigma_i$



$\Gamma_+(\theta) = (2\cos\theta, 3\sin\theta, 1);\ \Gamma_+ : [-\pi,\pi] \to \mathbb{R}^3$

$\Gamma_-(\theta) = (2\cos\theta, 3\sin\theta, 0);\ \Gamma_- : [-\pi,\pi] \to \mathbb{R}^3$

Γ_+ è compatibile con ν

Γ_- non lo è

(1.6) Calcolare $\iint_\Sigma (\nabla \times F)\cdot \mu d\sigma$, con la stessa F di (1.4). Uso Stokes:

$$\int_{\partial\Sigma} F(\Gamma)\cdot d\Gamma = \int_{-\pi}^{\pi} (-3\sin\theta, 2\cos\theta, e^{1\cdot 1})\cdot(-2\sin\theta, 3\cos\theta, 0)\, d\theta$$
$$- \int_{-\pi}^{\pi} (-3\sin\theta, 2\cos\theta, e^{0\cdot 1})\cdot(-2\sin\theta, 3\cos\theta, 0)\, d\theta$$
$$= \int_{-\pi}^{\pi} 6\, d\theta - \int_{-\pi}^{\pi} 6\, d\theta = 0$$

(2) [2 pti] Dire per quale valore del parametro $\alpha \in \mathbb{R}$ il campo $F_\alpha : \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \to \mathbb{R}^2$ è chiuso, dove

$$F_\alpha(x,y) = \left(e^{xy} + xye^{xy} + y^5, x^2e^{xy} + \alpha xy^4\right).$$

Dire per quali di questi F è anche esatto. $F = (P, Q)$:

$P_y = xe^{xy} + xe^{xy} + x^2ye^{xy} + 5y^4$

$Q_x = 2xe^{xy} + x^2ye^{xy} + \alpha y^4$

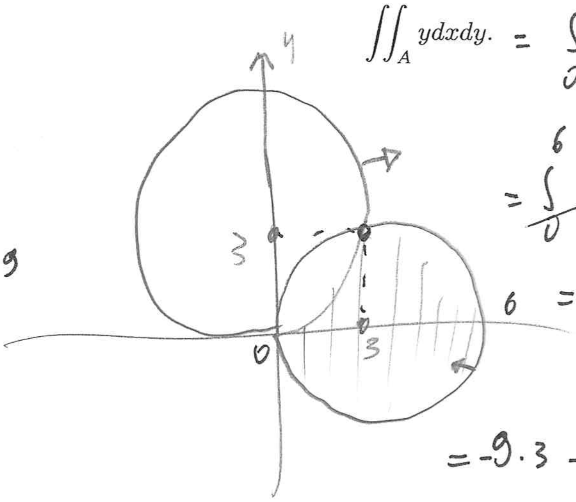
F chiuso $\iff \alpha = 1$, nel qual caso F è esatto poiché F è in realtà definibile su $\mathbb{R}^2$, che è semplicemente connesso.

(3) [5 pti] Sia $A = \{(x,y) : (x-3)^2 + y^2 \le 9;\ x^2 + (y-3)^2 \ge 9\} \subset \mathbb{R}^2$. Calcolare

$$\iint_A y\,dxdy. = \int_0^6 dx \int_{-\sqrt{9-(x-3)^2}}^{\sqrt{9-(x-3)^2}} y\,dy - \int_0^3 dx \int_{\sqrt{9-(x-3)^2}}^{3-\sqrt{9-x^2}} y\,dy$$

$$\begin{cases}(x-3)^2+y^2=9\\ x^2+(y-3)^2=9\end{cases}$$
$\Updownarrow$
$$\begin{cases}x=y\\ (x-3)^2+y^2=9\end{cases}$$
$2x^2-6x=0$

$x=0,\ x=3$



$$= \cancel{\int_0^6 \frac{9-(x-3)^2}{2}\,dx} - \int_0^3 \frac{(3-\sqrt{9-x^2})^2 - (9-(x-3)^2)}{2}\,dx$$

$$= \cancel{\int_0^6 \frac{6x-x^2}{2}\,dx} - \int_0^3 \frac{18 \cancel{-x^2} - 6x + \cancel{x^2} - 6\sqrt{9-x^2}}{2}\,dx$$

$$= -9\cdot 3 + 3(3^2-0^2) + 3\int_0^3 \sqrt{9-x^2}\,dx$$

$$= -27+27 + 3\cdot 9\cdot \int_0^{\pi/2} \cos^2 t\,dt$$

$\uparrow$

$x = 3\sin t \qquad t\in[0,\pi/2]$

$dx = 3\cos t$

$$= 27\cdot \frac{\pi}{4}$$

(4) [3 pti] Risolvere il problema di Cauchy

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}\left(x^2-1\right) = \frac{t^2}{3} - \frac{t}{2}, \\ x(0) = -2. \end{cases}$$

Trovare il dominio naturale della soluzione.

$$[x(t)^2-1]-[x(0)^2-1] = \int_0^t \frac{d}{ds}[x^2(s)-1]\,ds = \int_0^t \left(\frac{s^2}{3}-\frac{s}{2}\right)ds = \left(\frac{s^3}{9}-\frac{s^2}{4}\right)_0^t = \frac{t^3}{9}-\frac{t^2}{4}$$

$$\| $$

$$x(t)^2 - x(0)^2 = x(t)^2 - 4 \Rightarrow x(t) = \pm\sqrt{\frac{t^3}{9}-\frac{t^2}{4}+4}$$

poiché $x(0) = -2 < 0$: $\boxed{x(t) = -\sqrt{\frac{t^3}{9}-\frac{t^2}{4}+4}}$

(5) [2 pti] Siano $\alpha, \beta \in C^1(\mathbb{R}^2,\mathbb{R})$ e $h \in C^1(\mathbb{R}^2,\mathbb{R})$ e si definisca $f:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$,

$$f(x,y) = h(\alpha(x,x)+\beta(y,y), \alpha(y,y)+\beta(x,x)).$$

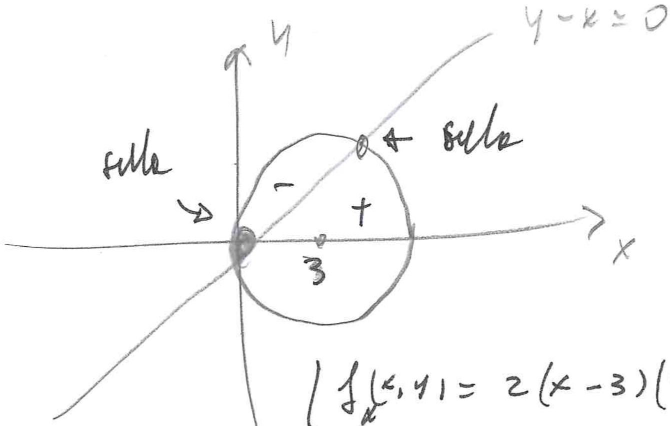
Calcolare il gradiente di f in (x,y).

Siano $h = h(u,v)$; $u = \alpha(x,x)+\beta(y,y)$; $v = \alpha(y,y)+\beta(x,x)$; $\alpha = \alpha(s,t)$; $\beta = \beta(s,t)$

$$f_x(x,y) = h_u(u,v)\cdot[\alpha_s(x,x)+\alpha_t(x,x)] + h_v(u,v)\cdot[\beta_s(x,x)+\beta_t(x,x)]$$

$$f_y(x,y) = h_u(u,v)\cdot[\beta_s(y,y)+\beta_t(y,y)] + h_v(u,v)\cdot[\alpha_s(y,y)+\alpha_t(y,y)]$$

(6) [4 pti] Classificare i punti critici di $f(x,y) = \left[(x-3)^2+y^2-9\right]\cdot[y-x]$.



selle in $(0,0)$, $(3,3)$ a più calcolato in altro esercizio

avrò un pto max. rel
un p.to min. rel | almeno

$$\begin{cases} f_x(x,y) = 2(x-3)(y-x) - [(x-3)^2+y^2-9] \\ f_y(x,y) = 2y(y-x) + [(x-3)^2+y^2-9] \end{cases}$$

$$\nabla f(x,y) = 0 \iff \begin{cases} 0 = f_y + f_x = 2\cdot(y-x)\cdot(y+x-3) \\ 0 = f_y = 2\cdot y\cdot(y-x) + [(x-3)^2+y^2-9] \end{cases}$$

$$\iff (A) \begin{cases} y = x \\ (x-3)^2+y^2-9 = 0 \end{cases}$$ cioè $(x,y) = (0,0), (3,3)$ pti sella

oppure

$$(B) \begin{cases} y+x-3 = 0 \quad (y = 3-x) \\ 0 = 2\cdot(3-x)\cdot(3-2x) + [(x-3)^2+(3-x)^2-9] \end{cases}$$

$$= 18 - 18x + 4x^2 + 2x^2 - 12x + 9 = 6x^2 - 30x + 27$$

$$= 3\cdot(2x^2-10x+9) \iff x = \frac{5\pm\sqrt{7}}{2}$$: $\left(x = \frac{5+\sqrt{7}}{2}, y = \frac{1-\sqrt{7}}{2}\right)$ MAX. rel

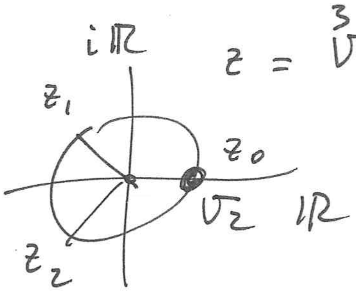
$\left(x = \frac{5-\sqrt{7}}{2}, y = \frac{1+\sqrt{7}}{2}\right)$ min. rel.

Analisi Matematica LB (16/07/2013)

Nome.. Cognome.. Matricola................

(1) [3 pt] Risolvere in $\mathbb{C}$ l'equazione

$$e^{z^2-1}(z^3-2)=0 \iff z^3 - 2 = 0$$



$$z = \sqrt[3]{2} \cdot \left[\cos\left(\frac{0+2k\pi}{3}\right) + i \cdot \sin\left(\frac{0+2k\pi}{3}\right)\right] \quad k = 0, 1, 2$$

$$z_0 = \sqrt[3]{2}; \quad z_1 = \sqrt[3]{2}\left(-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

$$z_2 = \sqrt[3]{2} \cdot \left(-\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

(2) [3 pt] Per quali valori di $\gamma > 0$ si ha la convergenza dell'integrale

$$\int_0^\infty \frac{1}{x^{2\gamma}+x^{3\gamma}}dx$$

$$f(x) = \frac{1}{x^{2\gamma}+x^{3\gamma}} \underset{x\to 0}{\sim} \frac{1}{x^{2\gamma}} : \int_0^1 f(x)\,dx \text{ conv.} \iff 2\gamma < 1, \ \gamma < 1/2$$

$$\underset{x\to+\infty}{\sim} \frac{1}{x^{3\gamma}} : \int_1^{+\infty} f(x)\,dx \text{ conv.} \iff 3\gamma > 1, \ \gamma > 1/3$$

$$\boxed{1/3 < \gamma < 1/2}$$

(3) **[4 pti]** Siano $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ l'insieme $\Omega = \left\{(x,y,z) : 1 \leq \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} \leq 4;\ 0 \leq z \leq 1\right\}$ e $f \in C(\Omega, \mathbb{R})$ continua.

Trovare $I = [\alpha, \beta] \subset \mathbb{R}$ e, per $z \in I$, trovare $A(z) \subseteq \mathbb{R}^2$, tali che

$$\iiint_\Omega f(x,y,z)dxdydz = \int_I \left[\iint_{A(z)} f(x,y,z)dxdy\right] dz$$

$I = [\alpha, \beta] = [0, 1]$ e $A(z) = \{(x,y) : 1 \leq \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} \leq 4\} \subseteq \mathbb{R}^2$ è indip. da z

(4) **[5 pti]** Sia $A = \left\{(x,y) : (x-2)^2 + y^2 \leq 4;\ x^2 + (y-2)^2 \geq 4\right\} \subset \mathbb{R}^2$. Calcolare

$$\iint_A y\,dxdy.$$

vedi AM2

(5) **[3 pti]** Risolvere il problema di Cauchy

$$\begin{cases} 2\dot{x}x = \frac{t^2}{3} - \frac{t}{2}, \\ x(0) = 2. \end{cases}$$

Trovare il dominio naturale della soluzione.

$$2\dot{x}x = \frac{d}{dt}[x(t)^2] : \quad x(t)^2 - 4 = x(t)^2 - x(0)^2 =$$

$$= \int_0^t \frac{d}{ds}[x(s)^2]\,ds = \int_0^t \left(\frac{s^2}{3} - \frac{s}{2}\right) ds$$

$$= \left(\frac{s^3}{9} - \frac{s^2}{4}\right)_0^t = \frac{t^3}{9} - \frac{t^2}{4} \Rightarrow x(t)^2 = 4 + \frac{t^3}{9} - \frac{t^2}{4}$$

$$x(t) = +\sqrt{4 + \frac{t^3}{9} - \frac{t^2}{4}}$$

poichè $x(0) = 2 > 0$.

(6) **[4 pti]** Siano $\alpha, \beta \in C^1(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$ e $h \in C^1(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$ e si definisca $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$,

$$f(x, y) = h(\alpha(x, x) + \beta(y, y), \alpha(y, y) + \beta(x, x)).$$

Calcolare il gradiente di f in (x, y).

$h = h(v, w)$ e $\alpha = \alpha(s,t)$, $\beta = \beta(s,t)$:

$$f_x(x,y) = h_v(v,w)\cdot[\alpha_s(x,x) + \alpha_t(x,x)] + h_w(v,w)\cdot[\beta_s(x,x) + \beta_t(x,x)]$$

con $v = \alpha(x,x) + \beta(y,y)$ e $w = \alpha(y,y) + \beta(x,x)$

$$f_y(x,y) = h_v(v,w)\cdot[\beta_s(y,y) + \beta_t(y,y)] + h_w(v,w)\cdot[\alpha_s(y,y) + \alpha_t(y,y)]$$

(7) **[8 pti]** Classificare i punti critici di $f(x, y) = [(x - 2)^2 + y^2 - 4] \cdot [y - x]$.

vedi AM2.