Prova scritta di Complementi di Analisi Matematica L-S
22 luglio 2011

Nome...**Cognome**... **Matricola**.................

Scrivete solo le soluzioni e, se volete, i passaggi principali. Scrivete sul e consegnate solo il foglio degli esercizi.

(1) [6 pti] Sia $f : [0, \pi] \to \mathbb{R}$,

$$f(x) = \begin{cases} 1 \text{ se } \cancel{0 \le x < 1/2,} \\ -1 \text{ se } \cancel{1/2 \le x \le 1}. \end{cases} \qquad \begin{matrix} 0 \le x < \pi/2 \\ \pi/2 \le x \le \pi \end{matrix}$$

Trovare $\{c_n : n \in \mathbb{N}, n \ge 1\}$ in $\mathbb{C}$ tali per cui

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \sin(nx) \text{ in } L^2([0, \pi]).$$

(2) [6 pti] Sia f la funzione dell'esercizio 1. Risolvere il problema di Cauchy:

$$\begin{cases} \partial_{xx} u(x,t) + \partial_t u(x,t) - \partial_{tt} u(x,t) = 0 \text{ per } (x,t) \in [0,\pi] \times [0,\pi]; \\ u(0,t) = u(\pi,t) = 0 \text{ per } t \in [0,\pi]; \\ u(x,0) = f(x) \text{ per } x \in [0,\pi]; \\ \partial_t u(x,0) = \frac{1}{2} f(x) \text{ per } x \in [0,\pi]. \end{cases}$$

(3) [6 pti]. Sia $u : \mathbb{R} \times [0, \infty) \to \mathbb{R}$ la soluzione di

$$(*) \begin{cases} \partial_t u(x,t) = 4\partial_{xx} u(x,t) \text{ in } \mathbb{R} \times [0,\infty), \\ u(x,0) = \varphi(x), \\ \cancel{\partial_t u(x,0) = 0.} \end{cases}$$

Sia $u = u(x,t)$ la soluzione del problema $(*)$. Scrivere l'espressione per $v(\zeta, t) := \hat{u}(\zeta, t) = \int_{-\infty}^{\infty} u(x,t) e^{-i\zeta x} dx$ e ricavarne un'espressione (integrale) per $u(x,t)$.

(4) [6 pti] Risolvere il problema di Cauchy

$$\begin{cases} \partial_t u(x,t) - e^{x-t} \partial_x u(x,t) = 0 \text{ in } \mathbb{R}^2; \\ u(x,0) = x \text{ per } x \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

(5) [6 pti] Trovare tutte le funzioni u tali che

$$\begin{cases} \partial_{xx} u(x,t) + \partial_t u(x,t) - \partial_{tt} u(x,t) = 0 \text{ per } (x,t) \in [0,\pi] \times [0,\pi]; \\ u(x,0) = u(x,\pi) = 0 \text{ per } x \in [0,\pi]. \end{cases}$$

① $c_n = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi f(x)\sin(nx)\,dx =$

$$= \frac{2}{\pi}\left(\int_0^{\pi/2}\sin(nx)\,dx - \int_{\pi/2}^{\pi}\sin(nx)\,dx\right) =$$

$$= \frac{2}{\pi}\left[\left(-\frac{\cos(nx)}{n}\right)_0^{\pi/2} + \left(\frac{\cos(nx)}{n}\right)_{\pi/2}^{\pi}\right]$$

$$= \boxed{\frac{2}{\pi n}\cdot\left[1 - 2\cos(n\pi/2) + \cos(n\pi)\right] = c_n}$$

<u>Oss.</u> che se $n = 2l+1$ è dispari, allora

$$c_{2l+1} = \frac{2}{\pi\cdot(2l+1)}\cdot\left(1 - 2\cdot\cos\left(\left(l+\frac{1}{2}\right)\pi\right) + \cos\pi\right)$$

$$= -\frac{4}{\pi(2l+1)}\cdot\cos\left(\left(l+1/2\right)\pi/2\right) = 0$$

se $n = 2l$ è pari, allora

$$c_{2l} = \frac{1}{\pi l}\cdot\left(1 - 2\cos(\pi) + 1\right) = \frac{2}{\pi l}\cdot\begin{cases}0 & \text{se } l \text{ è pari}\\ 2 & \text{se } l \text{ è dispari}\end{cases}$$

cioè, $c_{2\cdot(2k+1)} = c_{4k+2} = \frac{4}{\pi\cdot(2k+1)}$:

$c_{4k} = 0$; $c_{4k+1} = 0$; $c_{4k+2} = \frac{4}{\pi(2k+1)}$; $c_{4k+3} = 0$

$\forall\, k \geq 0$

$$\boxed{f(x) = \sum_{k\geq 0}\frac{4}{\pi\cdot(2k+1)}\cdot\sin((4k+2)x)}$$

② Pongo $v(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n(t)\cdot\sin(nx)$,

e ho $v(0,t) = v(\pi,t) = 0$;

$f(x) = v(x,0) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n(0)\sin(nx) \iff c_n(0) = c_n$ in ①

$\partial_t v(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n'(t)\sin(nx)$, quindi

$\frac{1}{2}f(x) = \partial_t v(x,0) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n'(t)\sin(nx) \iff c_n'(0) = \frac{c_n}{2}$

L'equazione differenziale diventa

$$0 = \partial_{xx} v + \partial_t v - \partial_{tt} v = \sum_{n=1}^{\infty} \sin(nt) \left[-n^2 c_n(t) + c_n'(t) - c_n''(t) \right]$$

Vogliamo risolvere:
$$\begin{cases} c_n''(t) - c_n'(t) + n^2 c_n(t) = 0 \\ c_n(0) = c_n \quad c_n'(0) = c_n/2 \end{cases}$$

Posto $c_n(t) = e^{\lambda t}$, $\lambda^2 - \lambda + n^2 = 0$

$\Delta = 1 - 4n^2 < 0$ (poiché $n \geq 1$)

$$\lambda = \frac{1}{2} \pm i \frac{\sqrt{4n^2-1}}{2}$$

$$c_n(t) = e^{t/2} \cdot \left[A_n \cdot \cos\left(\frac{\sqrt{4n^2-1}}{2} t \right) + B_n \cdot \sin\left(\frac{\sqrt{4n^2-1}}{2} t \right) \right]$$

$$c_n'(0) = \frac{1}{2} e^{t/2} \cdot \left[A_n \cos\left(\frac{\sqrt{4n^2-1}}{2} t \right) + B_n \sin\left(\frac{\sqrt{4n^2-1}}{2} t \right) \right]$$
$$+ e^{t/2} \cdot \frac{\sqrt{4n^2-1}}{2} \cdot \left[-A_n \sin\left(\frac{\sqrt{4n^2-1}}{2} t \right) + B_n \cos\left(\frac{\sqrt{4n^2-1}}{2} t \right) \right]$$

$c_n = c_n(0) = A_n$ e $\frac{c_n}{2} = c_n'(0) = \frac{A_n}{2} + B_n \cdot \frac{\sqrt{4n^2-1}}{2}$

$A_n = c_n$ e $B_n = 0$;

$$v(x,t) = e^{t/2} \sum_{n=1}^{\infty} c_n \cos\left(\sqrt{\frac{4n^2-1}{2}}\, t \right) \cdot \sin(nx)$$

$$= e^{t/2} \cdot \sum_{k=0}^{\infty} \frac{4}{\pi \cdot (2k+1)} \cdot \cos\left(\sqrt{\frac{4(4k+2)^2 - 1}{2}} \cdot t \right) \cdot \sin((4k+2)x)$$

(3) Se $v(\xi, t) = \int_{-\infty}^{+\infty} v(x,t)\, e^{-i\xi x}\, dx$, allora

$$\int_{-\infty}^{+\infty} v_{xx}(x,t)\, e^{-i\xi x}\, dx = \int_{-\infty}^{+\infty} (i\xi)^2\, v(x,t)\, e^{-i\xi x}\, dx \quad \text{(integro per parti)}$$

$= -\xi^2 \cdot v(\xi, t)$ e il ~~siste~~ problema diventa:

$$\begin{cases} \partial_t v(\xi, t) = -4\xi^2 v(\xi, t) \\ v(\xi, 0) = \hat{\varphi}(\xi) \end{cases}$$

$$v(\xi,t) = e^{-4\xi^2 t} \cdot C(\xi)$$

$$\hat{\varphi}(\xi) = v(\xi,0) = C(\xi)$$

cioè: $$v(\xi,t) = e^{-4\xi^2 t} \cdot \hat{\varphi}(\xi)$$

e $$u(x,t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-4\xi^2 t}\, \hat{\varphi}(\xi)\, e^{i\xi x}\, d\xi$$

4 Sia $x = x(t)$: $\frac{d}{dt} u(x(t),t) = u_x \cdot \dot{x} + u_t$.

Voglio $\dot{x}(t) = -e^{x-t} = -e^{x(t)} \cdot e^{-t}$

cioè $dx \cdot e^{-x} = -e^{-t}\,dt$; $x(0) = x_0$.

$$\int_{x_0}^{x} e^{-s}\,ds = -\int_0^t e^{-\tau}\,d\tau = \left(e^{-\tau}\right)_0^t = e^{-t} - 1 \quad (*)$$

$$\| \quad \left(-e^{-s}\right)_{x_0}^{x} = -e^{-x} + e^{-x_0}$$

Posto $\begin{cases} \varphi(t) = u(x(t),t), & \text{con} \\ \varphi(0) = u(x_0,0) = x_0 & \text{e} \quad \varphi'(t) = 0, \end{cases}$

ho $\varphi(t) = x_0$, cioè:

$u(x(t),t) = \varphi(t) = x_0$.

Da $(*)$: $x_0 = \log\left(e^{-x} + e^{-t} - 1\right)^{-1}$.

Quindi, $$u(x,t) = \log \frac{1}{e^{-t} + e^{-x} - 1}$$

5 $$u(x,t) = e^{\frac{t}{2}} \sum_{n=1}^{\infty} \left[A_n \cos\left(\frac{\sqrt{4n^2-1}}{2}\, t\right) + B_n \sin\left(\frac{\sqrt{4n^2-1}}{2}\, t\right) \right] \sin(nx)$$

(facevo meno dell'Es. 2)

5 FACILE!