Prova Scritta di Analisi Matematica LS
Ingegneria Civile

Nicola Arcozzi

26 luglio 2010

Il tempo a disposizione é di 2 ore e 30 minuti. Non si possono utilizzare libri o appunti, eccetto un foglio protocollo formato A4 con formule che si ritengono utili. Si è ammessi alla prova orale con un punteggio di almeno 15/30 punti.

(1) Trovare la soluzione del problema:

$$\begin{cases} u_{xx}(x,t) - 2u_x(x,t) = u_t(x,t) \text{ per } 0 \leq x \leq \pi,\ 0 \leq t \\ u(x,0) = e^x \text{ per } 0 \leq x \leq \pi;\ u(0,t) = u(\pi,t) = 0 \text{ per } 0 \leq t. \end{cases}$$

(2) Trovare la soluzione del problema non omogeneo con condizioni al bordo nulle:

$$\begin{cases} u_{xx}(x,t) - 2u_x(x,t) = u_t(x,t) - 4e^x \sin(3x) \text{ per } 0 \leq x \leq \pi,\ 0 \leq t \\ u(x,0) = 0, \text{ per } 0 \leq x \leq \pi;\ u(0,t) = u(\pi,t) = 0 \text{ per } 0 \leq t. \end{cases}$$

(3) Trovare la soluzione del problema di Cauchy:

$$\begin{cases} u_t(x,t) + 3xt^2 u_x = \frac{1}{3u^2(x,t)} \text{ per } x \in \mathbb{R},\ t \geq 0, \\ u(x,0) = \sqrt[3]{x} \end{cases}$$

Trovare l'insieme $E = \{(x,t) :\ u(x,t) \in \mathbb{R} \times [0,+\infty) \text{ ha significato}\}$.

(1) Inizio con
$$(\#)\begin{cases} v_{xx}(x,t) - 2v_x(x,t) = v_t(x,t) \\ v(0,t) = v(\pi,t) = 0 \qquad \forall t \geq 0 \end{cases}$$

$v(x,t) = \varphi(x)\cdot\psi(t)$: $\quad \varphi''(x)\psi(t) - 2\varphi'(x)\cdot\psi(t) = \varphi(x)\psi'(t)$

$\varphi(0)\psi(t) = \varphi(\pi)\psi(t) = 0 \quad \forall t \geq 0$

$\varphi(0) = \varphi(\pi) = 0$

$$\frac{\varphi''(x) - 2\varphi'(x)}{\varphi(x)} = \frac{\psi'(t)}{\psi(t)} \quad \forall (x,t), \text{ quindi } \exists k \in \mathbb{R}:$$

$$\begin{cases} \varphi''(x) - 2\varphi'(x) = k\,\varphi(x) \quad e \quad \psi'(t) = k\,\psi(t) \\ \varphi(0) = \varphi(\pi) = 0 \end{cases}$$

$\lambda^2 - 2\lambda - k = 0$

$\lambda = 1 \pm \sqrt{k+1}$ $\quad \mapsto$ per avere soluzioni con $\varphi(0) = \varphi(\pi) = 0$, $\varphi \not\equiv 0$, occorre $k+1 = -n^2$ $(n \in \mathbb{N}, n \geq 1)$.

$\lambda = 1 \pm i n$

$$\varphi(x) = e^x\cdot[\cancel{A\cos(nx)} + B\sin(nx)]$$

$$0 = \psi'(t) - k\,\psi(t) = \psi'(t) + (1+n^2)\psi(t)$$

$$\psi(t) = c\cdot e^{-(1+n^2)t}$$

Le soluzioni di $(\#)$ hanno la forma:

$$v(x,t) = e^x\cdot\sum_{n=1}^{\infty} e^{-(1+n^2)t}\cdot[\cancel{A_n\cos(nx)} + B_n\sin(nx)]$$

Quindi

$$\underset{\substack{\parallel \\ e^x}}{v(x,0)} = e^x\cdot\sum_{n=1}^{\infty}[\cancel{A_n\cos(nx)} + B_n\sin(nx)]$$

Voglio quindi
$$1 = \sum_{n=1}^{\infty} B_n \cdot \sin(nx) \qquad \forall x \in [0, \pi].$$

Estendo $f(x)=1$ a una funzione dispari su $[-\pi, \pi]$:
$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } 0 < x \leq \pi \\ -1 & \text{se } -\pi \leq x < 0 \end{cases}$$

e dichiaro $f(0)=0$.

Scrivo $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n \sin(nx)$ per $x \in [-\pi, \pi]$,

con
$$B_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\cdot\sin(nx)\,dx = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} \sin(nx)\,dx$$
$$= \frac{2}{\pi}\cdot\left[-\frac{\cos(nx)}{n}\right]_0^{\pi} = \frac{2}{\pi n}\cdot\left(1-\cos(n\pi)\right).$$

La soluzione di (1) è
$$\boxed{v(x,t) = e^x \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{\pi n}\left(1-\cos(n\pi)\right)\cdot\sin(nx)\cdot e^{-(1+n^2)t}.}$$

(2) Ispirato da (1), cerco una soluzione di (2) nella forma
$$(*)\quad v(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} e^x \sin(nx)\cdot c_n(t)$$

Usando i conti di (1), ho che
$$v_{xx}(x,t) - 2\cdot v_x(x,t) = e^x \cdot \sum_{n=1}^{\infty}\left[-(n^2+1)\right]\cdot\sin(nx)\cdot c_n(t)$$
per ogni $v = v(x,t)$ come in $(*)$.

Il problema diviene quindi:

$$\sum_{n=1}^{\infty} e^x \sin(nx) \cdot \left[-(n^2+1)\cdot c_n(t) - c_n'(t)\right] =$$

$$= -4 \cdot e^x \cdot \sin(3x)$$

con $c_n(0)=0$ per $n \geq 1$.

Chiaramente, $c_n(t) \equiv 0$ per $n \neq 3$, mentre

per $n=3$: $\begin{cases} -10 \cdot c_3(t) - c_3'(t) = -4 \\ c_3(0) = 0 \end{cases}$

$\begin{cases} c_3' + 10 c_3 = 4 \\ c_3(0) = 0 \end{cases}$ $\qquad c_3(t) = \frac{4}{10} + A e^{-10 \cdot t}$

$0 = c_3(0) = \frac{4}{10} + A \; : A = -\frac{4}{10}$

$$c_3(t) = \frac{2}{7} \cdot \left(1 - e^{-10t}\right)$$

La soluzione di (2) è

$$\boxed{v(x,t) = \frac{2}{7}\left(1 - e^{-10t}\right) \cdot e^x \cdot \sin(3x)}$$

3 Cerco $x = x(t)$ t.c. $\frac{\partial}{\partial t} v(x(t),t) =$

$= v_x(x(t),t) \cdot \dot{x}(t) + v_t(x(t),t) \stackrel{*}{=}$

$\stackrel{*}{=} v_x(x(t),t) \cdot 3t^2 + v_t(x(t),t)$ e $x(0) = x_0 \in \mathbb{R}$:

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = 3x(t)t^2 \\ x(0) = x_0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{x} = 3t^2 \\ x(0) = x_0 \end{cases} \qquad \int_{x_0}^{x(t)} \frac{dy}{y} \doteq \int_0^t 3s^2\,ds = t^3$$

$$\int_{x_0}^{x(t)} \frac{dy}{y} = \log|y|\Big|_{x_0}^{x(t)} = \log\left|\frac{x(t)}{x_0}\right|$$

cioè, $\boxed{x(t) = x_0 \cdot e^{t^3}}$

Posto $\varphi(t) = v(x(t), t)$, abbiamo:

$$\begin{cases} \dot{\varphi}(t) = \dfrac{1}{3\varphi^2(t)} \\ \varphi(0) = v(x(0), 0) = v(x_0, 0) = \sqrt[3]{x_0} \end{cases}$$

$$\begin{cases} 3\varphi^2\,d\varphi = dt \\ \varphi(0) = \sqrt[3]{x_0} \end{cases} \qquad \int_{\varphi(0)}^{\varphi(t)} 3v^2\,dv = \int_0^t ds = t$$

$$\int_{\varphi(0)}^{\varphi(t)} 3v^2\,dv = \varphi(t)^3 - \varphi(0)^3 = \varphi(t)^3 - x_0$$

cioè $\varphi(t) = \sqrt[3]{x_0 + t}$

Dunque: $v(x(t), t) = \varphi(t) = \sqrt[3]{x_0 + t} =$

$$= \sqrt[3]{x(t) \cdot e^{-t^3} + t}$$

La soluzione di (3) è $\boxed{v(x,t) = \sqrt[3]{x \cdot e^{-t^3} + t}}$

v è derivabile ~~tranne~~ rispetto a x e t, tranne che ~~per~~ nei punti per cui $v(x,t) = 0$: $x = -e^{t^3} \cdot t$.

E ~~[illegible]~~ $\{(x,t) : t \geq 0;\ x \neq -e^{t^3} t\}$.