PROVA SCRITTA DI ANALISI MATEMATICA L-B

Nicola Arcozzi

14 aprile 2010

Cognome e nome (in stampatello):

Il tempo a disposizione é di 2 ore e 30 minuti.
Si viene ammessi alla prova orale con un punteggio superiore o uguale a 10 pt.

(1) [4 punti] Determinare gli $z \in \mathbb{C}$, tali che

$$\left(z^3 + i\right)\left(z^2 - 2iz - 1\right) = 0\,.$$

(2)
[3 punti] Sia $f \in C^1\left(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}\right)$ e poniamo

$$h : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}\,, \qquad h(x,y,z) = x \cdot f(y,z) + y \cdot f(z,x) + z \cdot f(x,y).$$

Calcolare $\nabla h\,(x_0, y_0, z_0)$.

(3)
[5 punti] Classificare i punti critici della funzione

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R},\;\; f(x,y) = ((x-1)^2 - y^2)(x-2) + 1.$$

(4)

[4 punti] Calcolare l'integrale generale dell'equazione differenziale

$$y'' - 4y = \sin(2x).$$

(5)

[5 punti] Calcolare l'integrale doppio

$$I = \int_{\Omega} x dx dy,$$

dove

$$\Omega = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \ 0 \le y \le -x, \ 1 \le x^2 + y^2 \le 4\right\}.$$

(6)

[5 punti] Sia

$$A = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \ x^2 + y^2 + \frac{z^2}{4} \le 4, \ x^2 + y^2 \ge 1\right\}.$$

Se $f \in C(A, \mathbb{R})$, determinare $a, b \in \mathbb{R}$ e $A(z) \subset \mathbb{R}^2$, per ogni $z \in [a, b]$, tali che

$$\int\int\int_A f(x, y, z)\, dx\, dy\, dz = \int_a^b \left(\int\int_{A(z)} f(x, y, z)\, dx\, dy \right) dz.$$

(7)

[4 punti] Determinare per quali valori del parametro $\gamma \in \mathbb{R}^+$ la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin\left(\frac{1}{n}\right)}{\left(n + \frac{1}{n}\right)^{\gamma} - 1}$$

converge.