Svolgimento.

PROVA SCRITTA DI ANALISI MATEMATICA L-B

Nicola Arcozzi

30 giugno 2010

Cognome e nome (in stampatello):

Il tempo a disposizione é di 2 ore e 30 minuti.
Si viene ammessi alla prova orale con un punteggio superiore o uguale a 10 pt.

(1) [4 punti] Risolvere in $\mathbb{C}$ l'equazione:

$$(z^4 + i)(z^2 + 2z + 5) = 0.$$

(2)
[3 punti] Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funzione $f \in C^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ e si definisca $h : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$,

$$h(u, v, \alpha) = (u \cos(v + \alpha), u \sin(v + \alpha), f(u)).$$

Calcolare $Jh(u, v, \alpha)$

(3)
[5 punti] Determinare e classificare i punti critici della funzione $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$,

$$f(x, y) = 2x^2y + 3xy^2 - xy + 17$$

(4)

[4 punti] Calcolare l'integrale generale dell'equazione differenziale

$$(y' + 5y)' = x$$

(5)

[5 punti] Calcolare l'integrale

$$\iint_A (2x-1)\cos(y)\,dxdy,$$

dove

$$A = \{(x,y) : \ \frac{x-x^2}{3} \leq y \leq 3(x-x^2), \ x \leq \frac{1}{2}\}.$$

(6)

[5 punti] $\Omega = \{(x,y,z) : \ \frac{x^2}{4} + \frac{z^2}{9} \leq 1, \ -1 \leq y \leq 0, z \geq 0\} \cup \{(x,y,z) : \ \frac{x^2}{4} + y^2 + \frac{z^2}{9} \leq 1, \ z \geq 0, \ y \geq 0\} \subset \mathbb{R}^3$ e $f \in C(\mathbb{R}^3, \mathbb{R})$. Trovare $a, b \in \mathbb{R}$ e, per ogni y in $[a,b]$, trovare $\Omega(y) \subset \mathbb{R}^2$ tali per cui:

$$\iiint_\Omega f(x,y,z)\,dxdydz = \int_a^b \left(\iint_{\Omega(y)} f(x,y,z)\,dxdz \right) dy$$

(7)

[4 punti] Trovare i valori di γ in $\mathbb{R}^+$ per cui converge la serie

$$\sum_n \frac{1-\cos(n^{-\gamma})}{n^{2\gamma} + n^{5\gamma}}$$

(1) $z^4 = -i = e^{-i\pi/2} \iff z = e^{-\frac{i\pi}{8} + \frac{ik\pi}{2}}$ $\quad k = 0,1,2,3$

$= \cos\left(-\frac{\pi}{8} + \frac{k\pi}{2}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{8} + \frac{k\pi}{2}\right) \quad k = 0,1,2,3$

che ci dà 4 soluzioni.

$z^2 + 2z + 5 = 0 \qquad \Delta = 4 - 4\cdot 5 = -16 = (4i)^2$

$z = \frac{-2 \pm 4i}{2} = -1 \pm 2i$, altre due soluzioni.

(2) $Jh(v, \vartheta, \alpha) = \begin{pmatrix} \cos(\vartheta+\alpha) & -v\sin(\vartheta+\alpha) & -v\sin(\vartheta+\alpha) \\ \sin(\vartheta+\alpha) & v\cos(\vartheta+\alpha) & v\cos(\vartheta+\alpha) \\ f'(v) & 0 & 0 \end{pmatrix}$

(3) $\begin{cases} f_x = 4xy + 3y^2 - y = 0 = y\cdot(4x+3y-1) \\ f_y = 2x^2 + 6xy - x = x\cdot(2x+6y-1) = 0 \end{cases}$

$\begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} x = 0 \\ y = 1/3 \end{cases} \quad \begin{cases} x = 1/2 \\ y = 0 \end{cases} \begin{cases} 4x + 3y = 1 \\ 2x + 6y = 1 \end{cases}$

$(0,0) \quad (0, 1/3) \quad (1/2, 0) \quad \begin{cases} x = 1/6 \\ y = 1/9 \end{cases}$

$(1/6, 1/9)$

Sono i 4 punti critici.

$\text{Hess} f(x,y) = \begin{bmatrix} 4y & 4x+6y-1 \\ 4x+6y-1 & 6x \end{bmatrix}$

$(0,0) \longmapsto \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ sella $\quad (0, 1/3) \longmapsto \begin{pmatrix} 4/3 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ sella

$(1/2, 0) \longmapsto \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$ sella $\quad (1/6, 1/9) \longmapsto \begin{pmatrix} 4/9 & 2/3 + \frac{2}{3} - 1 \\ \frac{2}{3} + \frac{2}{3} - 1 & 1 \end{pmatrix}$

$$\det\begin{pmatrix} 4/9 & 1/3 \\ 1/3 & 1 \end{pmatrix} = \frac{4}{9} - \frac{1}{9} = \frac{1}{3} > 0$$

def. pos. $\Rightarrow \left(\frac{1}{6}, \frac{1}{9}\right)$ è p.to di min. rel.

(4) $(y' + 5y)' = x \iff y' + 5y = \frac{x^2}{2} + C$ per integrazione diretta

Soluzione particolare:

$$y = Ax^2 + Bx + D$$

$$y' = 2Ax + B$$

$$\frac{x^2}{2} + C = (2Ax + B) + 5\cdot(Ax^2 + Bx + D)$$

$$= 5A\cdot x^2 + (2A + 5B)x + B + 5D$$

$$\iff 5A = 1/2 \quad \left(A = \frac{1}{10}\right)$$

$$\frac{2}{10} + 5B = 0 \quad \left(B = -\frac{1}{25}\right)$$

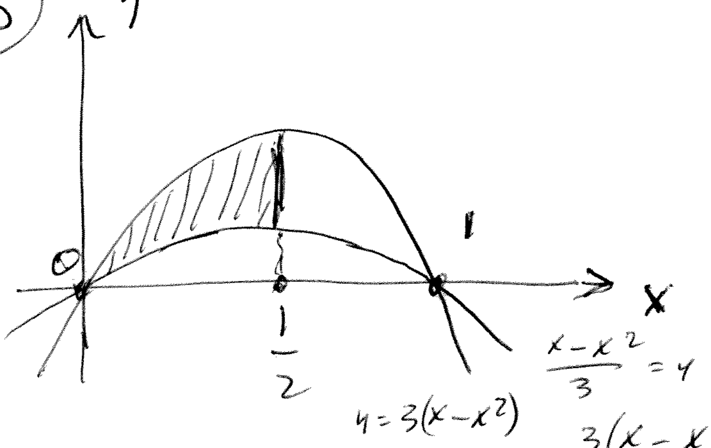
$$C = -\frac{1}{25} + 5D \quad \left(D = \frac{1}{125} + \frac{C}{5}\right)$$

Omogenea: $z' + 5z = 0$, $\lambda + 5 = 0$, $\lambda = -5$ $\Big|$ $z = K\cdot e^{-5x}$

Integrale generale:

$$y(x) = K\cdot e^{-5x} + \frac{1}{10}x^2 - \frac{1}{25}x + D$$

(5)



$$\text{Integrale} = \int_0^{1/2} dx \int_{\frac{x-x^2}{3}}^{3(x-x^2)} dy \cdot (2x-1)\cdot \cos(y)$$

$$= \int_0^{1/2} (2x-1)\cdot \sin(y)\Big|_{\frac{x-x^2}{3}}^{3(x-x^2)} dx$$

$$= \int_0^{1/2} \left[\sin(3(x-x^2)) - \sin\left(\frac{x-x^2}{3}\right)\right](2x-1)\,dx$$

$$= \frac{\cos(3(x-x^2))}{3}\Big|_0^{1/2} - 3\cdot\cos\left(\frac{x-x^2}{3}\right)\Big|_0^{1/2}$$

$$= \frac{\cos(3/4)-1}{3} - 3\cdot\left[\cos(1/12)-1\right]$$

(7) $\cos(n^{-\gamma}) = 1 - \frac{1}{2n^{2\gamma}} + o\left(\frac{1}{n^{2\gamma}}\right)$ se $\gamma>0$, per $n\to\infty$

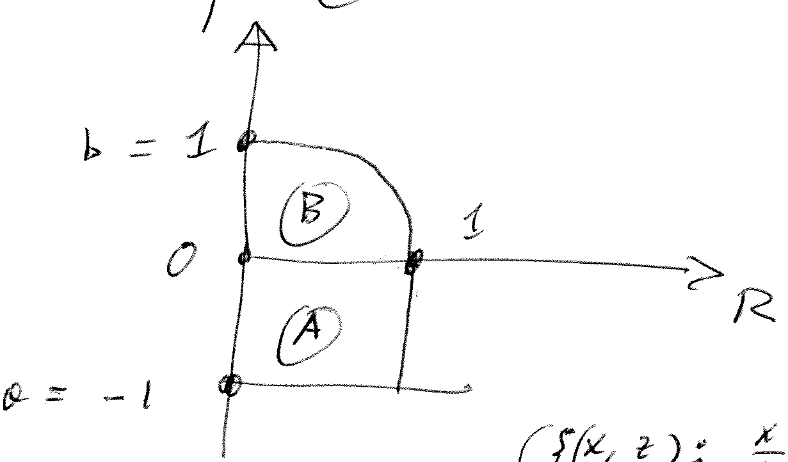
$$\frac{1-\cos(n^{-\gamma})}{n^{2\gamma}+n^{5\gamma}} \underset{n\to\infty}{\sim} \frac{1}{2}\cdot\frac{\frac{1}{n^{2\gamma}}}{n^{5\gamma}} = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{n^{7\gamma}}$$

La serie converge per $7\gamma>1$, $\gamma > 1/7$

6. Pongo $R \geq 0$, $R^2 = \frac{x^2}{4} + \frac{z^2}{9}$.

$$\underbrace{\begin{cases} R \geq 0 \\ R^2 \leq 1 \\ -1 \leq y \leq 0 \end{cases}}_{A} \quad o \quad \underbrace{\begin{cases} R^2 + y^2 \leq 1 \\ y \geq 0 \\ R \geq 0 \end{cases}}_{B}$$

e $z \geq 0$ in ogni caso.



$$\Omega(y) = \begin{cases} \left\{(x,z) : \frac{x^2}{4} + \frac{z^2}{9} \leq 1 \text{ e } z \geq 0\right\} & \text{se } -1 \leq y \leq 0 \\ \left\{(x,z) : \frac{x^2}{4} + \frac{z^2}{9} \leq 1 - y^2 \text{ e } z \geq 0\right\} & \text{se } 0 \leq y \leq 1 \end{cases}$$