Prova Scritta di Analisi Matematica LS

Nicola Arcozzi

14 aprile 2010

Il tempo a disposizione é di 2 ore e 30 minuti. Non si possono utilizzare libri o appunti, eccetto un foglio protocollo formato A4 con formule che si ritengono utili. Si è ammessi alla prova orale con un punteggio di almeno 15/30 punti.

(1) Trovare la soluzione del problema al bordo non omogeneo:

$$\begin{cases} u_{yy}(x,y) - u_{xx}(x,y) - u_x(x,y) = \sin(y) \text{ per } x \in [0,\pi],\ y \geq 0, \\ u(x,0) = 0 \text{ per } x \in [0,\pi];\ u(0,y) = u(\pi,y) = 0 \text{ per } y \geq 0. \end{cases}$$

(2) Trovare la soluzione del seguente problema di Cauchy:

$$\begin{cases} u_t(x,t) + u_x(x,t) = e^{u(x,t)} \\ u(x,0) = x. \end{cases}$$

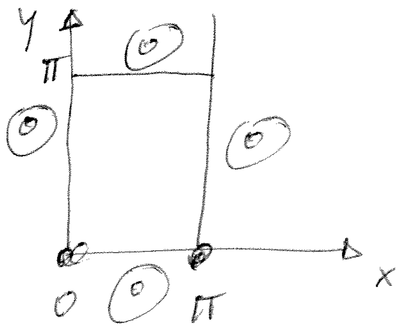
(3) Trovare i coefficienti c_n in $\mathbb{C}$ tali per cui si abbia l'uguaglianza:

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n \sin(nx) = 1$$

in $L^2([0,\pi])$.

$$\begin{cases} v_{xx}(x,y) - v_{yy}(x,y) - v_y(x,y) = \sin(x) \text{ in } [0,\pi]\times[0, \\ v(x,0) = v(x,\pi) = v(0,y) = v(\pi,y) \text{ se } x \in [0,\pi \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \text{o } y \in [0,\pi \end{cases}$$

Es. 1.



Data la natura del dato al bordo
$(v(0,y) = v(\pi,y) = 0)$
e dell'equazione, provo

con soluzioni del tipo

$$(*) \quad v(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n(y) \cdot \sin(nx).$$

Infatti, v in $(*)$ soddisfa $v(0,y) = v(\pi,y) = 0$

Inserisco nell'equazione differenziale:

$$\sin(x) \overset{*}{=} v_{xx} - v_{yy} - v_y$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \sin(nx) \cdot \left\{ -n^2 c_n(y) - c_n''(y) - c_n'(y) \right\}$$

e nelle residue condizioni iniziali:

$$0 = v(x,0) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n(0) \cdot \sin(nx),$$

$$0 = v(x,\pi) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n(\pi) \cdot \sin(nx).$$

Quindi, i coefficienti c_n soddisfano

$$\begin{cases} -n^2 c_n - c_n'' - c_n' = 0 \\ c_n(0) = c_n(\pi) = 0 \end{cases} \quad \text{se } n \geq 2 \quad \left(\begin{array}{l} \text{quindi,} \\ c_n = 0 \text{ per } n \geq 2 \end{array} \right.$$

$$\begin{cases} -c_1 - c_1'' - c_1' = 1 \\ c_1(0) = c_1(\pi) = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} c_1'' + c_1' + c_1 = -1 \\ c_1(0) = c_1(\pi) = 0 \end{cases}$$

Eq. omogenea: $\quad z'' + z' + z = 0$

Eq. caratteristica: $\quad \lambda^2 + \lambda + 1 = 0$

$$\lambda = -\frac{1}{2} \pm i\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$z(y) = e^{-y/2}\left\{A \cdot \cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}y\right) + B \cdot \sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}y\right)\right\}$$

Cerco una soluzione particolare $c_2(y) = k$ (costante):

$$0 + 0 + k = -1 \iff k = -1$$

Integrale generale:

$$c_1(y) = -1 + e^{-y/2} \cdot \left[A\cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}y\right) + B \cdot \sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}y\right)\right]$$

$$0 = c_1(0) = -1 + A \implies A = 1$$

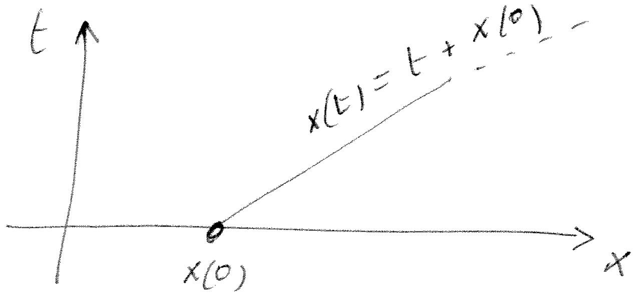
$$0 = c_1(\pi) = -1 + e^{-\pi/2} \cdot \left[\cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\pi\right) + B \cdot \sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\pi\right)\right]$$

$$\implies B = \frac{e^{\pi/2} - \cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\pi\right)}{\sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\pi\right)}$$

$$\implies c_1(y) = -1 + e^{-y/2} \cdot \left\{\cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}y\right) + \frac{e^{\pi/2} - \cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\pi\right)}{\sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\pi\right)} \sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}y\right)\right\}$$

e $$v(x,y) = \sin(x) \cdot \left\{-1 + e^{-y/2} \cdot \left[\cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}y\right) + \frac{e^{\pi/2} - \cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\pi\right)}{\sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\pi\right)} \cdot \sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}y\right)\right]\right\}$$

Es. 2.



~~Idealmente~~ Se ho

$\varphi(t) = v(x(t), t)$, allora

$$\dot{\varphi}(t) = v_t(x(t), t) + \dot{x}(t)\cdot v_x(x(t), t)$$

$$= v_t(x(t), t) + v_x(x(t), t)$$

$$\iff \dot{x}(t) = 1 \iff x(t) = t + x(0)$$

L'equazione diventa:

$$\begin{cases} \dot{\varphi}(t) = v_t(x(t), t) + v_x(x(t), t) = e^{v(x(t), t)} = e^{\varphi(t)} \\ \varphi(0) = v(x(0), 0) = x(0) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dot{\varphi}(t) = e^{\varphi(t)} \\ \varphi(0) = x(0) \end{cases} \iff \begin{cases} e^{-\varphi}\, d\varphi = dt \\ \varphi(0) = x(0) \end{cases} \iff$$

$$\iff \int_{\varphi(0)}^{\varphi(t)} e^{-\varphi}\, d\varphi = \int_0^t ds = t - 0 = t$$

$$\left(-e^{-\varphi}\right)_{\varphi(0)}^{\varphi(t)} = e^{\varphi(0)} - e^{-\varphi(t)} = e^{x(0)} - e^{-\varphi(t)}$$

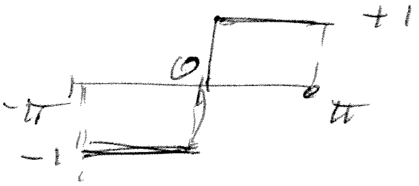
$$\iff e^{-\varphi(t)} = e^{x(0)} - t \iff \varphi(t) = -\log\left(e^{x(0)} - t\right)$$

$$\iff v(x(t), t) = \varphi(t) = -\log\left(e^{x(t) - t} - t\right):$$

$$\boxed{v(x, t) = -\log\left(e^{x-t} - t\right)}$$

Es. 3) Estendo $f(x) = 1$ $(0 \le x \le \pi)$ a

$$\tilde{f}(x) = \begin{cases} 1 & 0 \le x \le \pi \\ -1 & -\pi \le x < 0 \end{cases} \quad (\text{dispari}):$$



$$\tilde{f}(x) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \cdot \sin(nx) \quad \text{dove}$$

$$c_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \tilde{f}(x) \cdot \sin(nx)\, dx = \frac{2}{\pi} \int_{0}^{\pi} \sin(nx)\, dx$$

$$= \frac{2}{\pi} \cdot \left(-\frac{\cos(nx)}{n} \right)_0^{\pi} = \frac{2}{\pi n} \cdot (1 - \cos(n\pi))$$

$$= \frac{2}{\pi n} \begin{cases} 2 & n \text{ dispari} \\ 0 & n \text{ pari} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \quad 1 = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{4}{\pi \cdot (2m+1)} \cdot \sin((2m+1)x)$$

(convergenza in $L^2([0, \pi])$).