

**ALMA MATER STUDIORUM – UNIVERSITA' DI BOLOGNA**  
**DIPARTIMENTO DI MATEMATICA**  
**PROGETTO LAUREE SCIENTIFICHE**  
**A.A. 2015-2016**  
**GRAFI ED APPLICAZIONI**

16/03/2016

**DOCENTE:** Prof.ssa Laura Faggioli  
**TUTOR:** Dott.ssa Loredana Melcarne

**I LEZIONE (Teoria) : Introduzione e definizione di grafo**

**Introduzione**

Vi siete mai chiesti cosa abbiano in comune la rete di trasporto degli studenti, l'organizzazione dei voli di una compagnia aerea, la pulizia delle strade di una città, la metropolitana di Londra, una formula chimica, un albero genealogico, la colorazione delle carte geografiche, la rete internet? Apparentemente nulla, ma, in realtà, hanno in comune uno dei più potenti strumenti che la matematica abbia creato per rappresentare, studiare, risolvere i suoi problemi: i **grafi**.

Un grafo è un insieme di punti detti **nodi** connessi tra loro attraverso linee dette **archi**.

Non ha alcuna importanza dove questi oggetti si trovino né cosa essi siano esattamente: ognuno ha la libertà di interpretare queste strutture astratte come meglio crede, adattandole ai problemi concreti che si trova ad affrontare. Nel disegnare un grafo si conservano solo le informazioni che servono, tutto il resto si può eliminare.

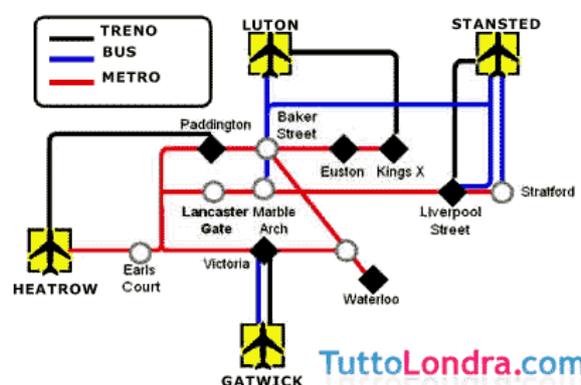
Pertanto, ai nodi e agli archi possono essere associate delle informazioni, utilizzate, in seguito, per mostrare o per analizzare situazioni diverse.

La rete del metrò, con le sue fermate e le sue linee, costituisce un grafo: in esso vengono ignorate alcune informazioni, ad esempio le distanze reali tra le fermate, ma poste in rilievo altre, ad esempio le linee rossa, verde, gialla, con i nodi d'interscambio.



Ancora: gli scali aeroportuali sono i nodi e le tratte sono gli archi del grafo, che rappresentano l'organizzazione di una compagnia aerea.

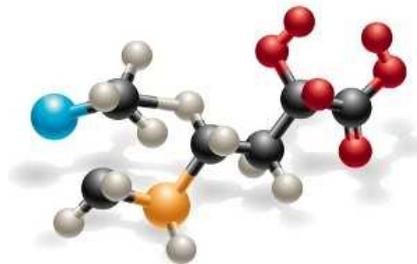
**MAPPA AEROPORTI LONDRA E COLLEGAMENTI COL CENTRO**



I punti di raccolta degli studenti e i percorsi per raggiungerli rappresentano un grafo, su cui è possibile risolvere il problema di trovare il percorso migliore, ad esempio il più veloce.



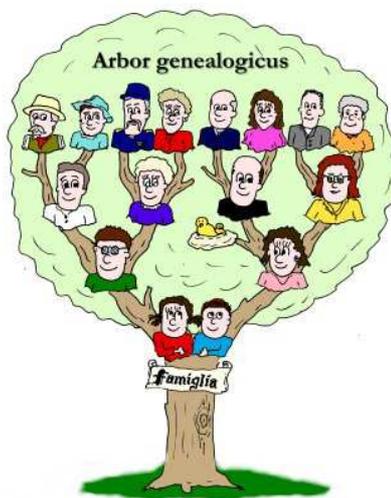
Anche le molecole e i loro legami sono spesso rappresentate come grafi.



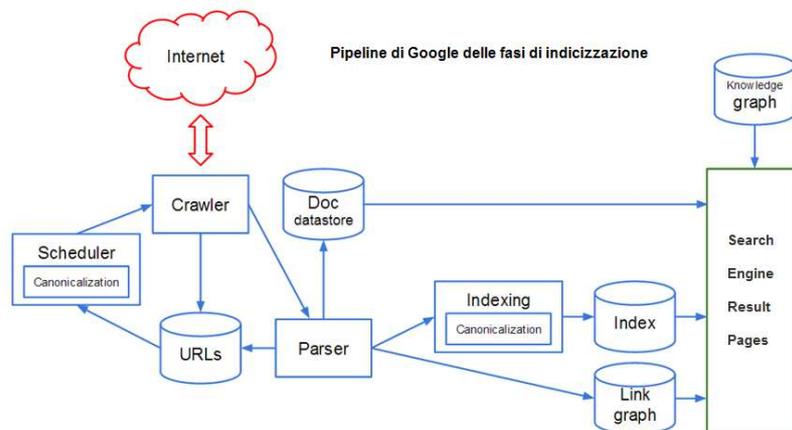
Persino la rete idrica di una centrale idroelettrica può essere rappresentata e, soprattutto, progettata mediante la struttura di un grafo.



Un ulteriore esempio è dato da Facebook: una mappa globale delle persone e delle loro relazioni. E' un' entità dinamica: ogni giorno conosciamo persone, le relazioni cambiano, scopriamo nuovi posti, cambiamo lavoro, stato civile, ecc e tutto ciò viene rappresentato attraverso un grafo.



Infine, la rete internet è il caso forse più noto: il grafo evidenzia i nodi con gli indirizzi - ormai un numero elevatissimo - e gli archi con i link che collegano un sito ad un altro; quando cerchiamo una parola con un motore di ricerca tipo Google ci viene mostrata una lista di siti, che è creata in basa al numero di link che "chiamano" ciascun sito.



## Definizioni

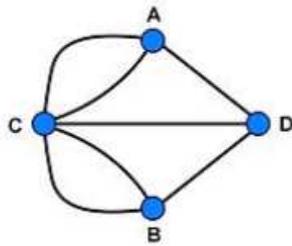
Chiamiamo **grafo** una figura piana costituita da  $n$  punti detti **vertici** o **nodi** collegati da un certo numero di segmenti o linee, detti **archi** o **spigoli** o **lati**.

Un grafo è definito da una coppia di insiemi  $(V,A)$ , dove  $V$  è un insieme non vuoto, i cui elementi sono i vertici ed  $A$  è un insieme di coppie non ordinate di elementi di  $V$ , dette archi.

Un grafo si dice **semplice** quando è non orientato e non comprende cappi e archi multipli.

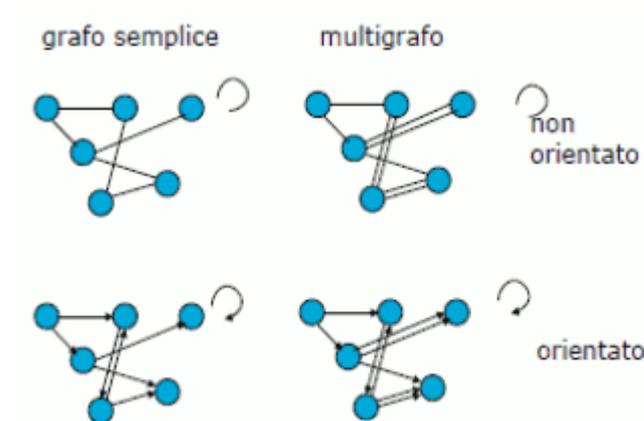
**Regione** : superficie chiusa limitata da una serie di archi.

**Ordine o grado di un vertice**: il numero di archi aventi come estremo il vertice considerato



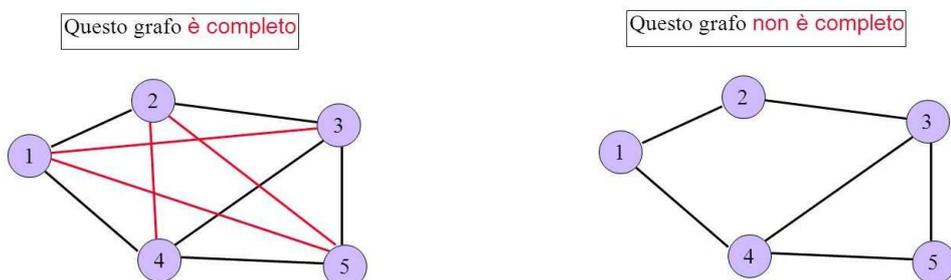
A,D,B hanno ordine 3  
C ha ordine 5

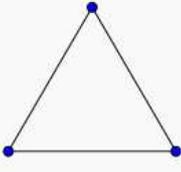
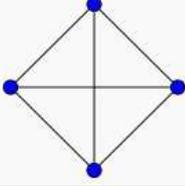
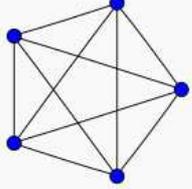
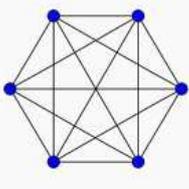
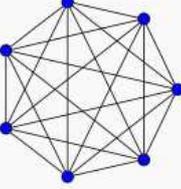
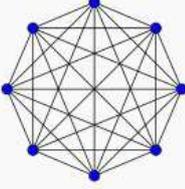
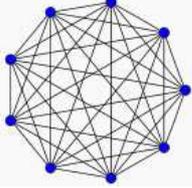
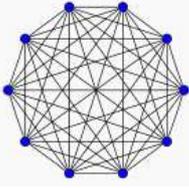
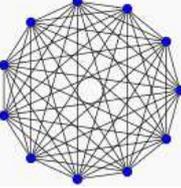
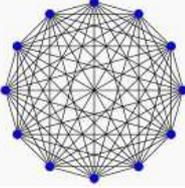
Inoltre, un grafo si dice **non orientato** se gli archi non hanno un verso, ossia se sono formati da coppie non ordinate. Invece, si dice **orientato** se gli archi hanno ciascuno un verso, cioè se sono formati da coppie ordinate.



Un grafo si dice **completo** se è semplice e tale che ogni vertice sia collegato a tutti i vertici rimanenti .

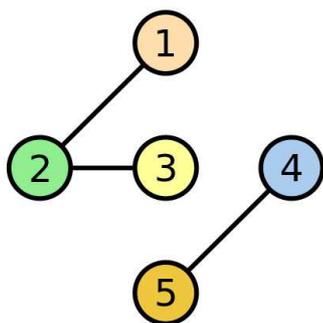
Un grafo completo di  $n$  vertici si indica con  $K_n$



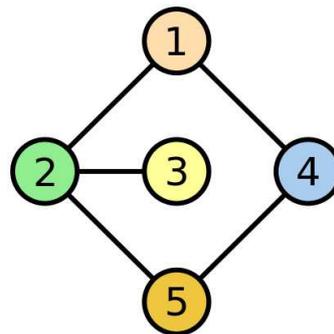
$K_1 : 0$	$K_2 : 1$	$K_3 : 3$	$K_4 : 6$
			
$K_5 : 10$	$K_6 : 15$	$K_7 : 21$	$K_8 : 28$
			
$K_9 : 36$	$K_{10} : 45$	$K_{11} : 55$	$K_{12} : 66$
			

Dato un grafo, si dice **cammino o catena** da A in B, un insieme di vertici, con inizio in A e termine in B, tale che per ogni coppia di vertici consecutivi dell'insieme esista un arco del grafo che li colleghi.

Un grafo non orientato si dice **connesso** se esiste un cammino per ogni coppia di nodi del grafo.



Grafo non connesso



Grafo connesso

Un cammino si dice **euleriano** se si può percorrere totalmente e senza interruzioni, senza passare più di una volta per lo stesso arco. Un **grafo euleriano** è un grafo in cui esiste un cammino euleriano.

