Attività 3: la caratteristica di Eulero, un numero per distinguere le superfici

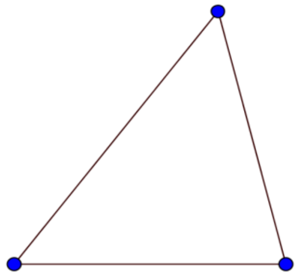
Consideriamo un grafo. Sia V il numero di vertici, S il numero di spigoli e F il numero di regioni del grafo. La **caratteristica di Eulero** del grafo è il numero $\boldsymbol{V - S + F}$.

Caratteristica di Eulero di grafi planari

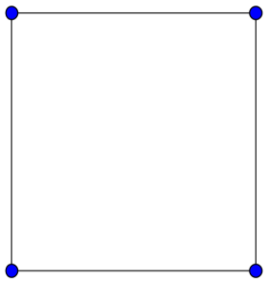
Per il momento consideriamo grafi planari, cioè grafi che si possono disegnare su un foglio di carta senza che i loro spigoli si intersechino al di fuori dei vertici.

Qui sotto vi sono degli esempi. Per ognuno di essi calcoliamo la caratteristica di Eulero.

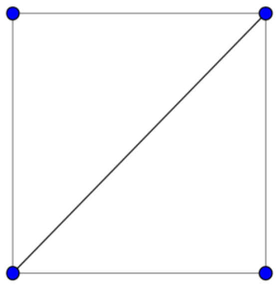
Per quanto riguarda il conto delle regioni, considerate anche la regione esterna illimitata.



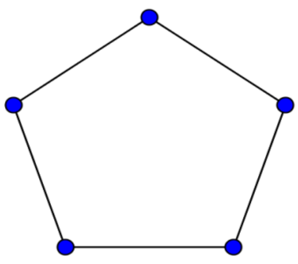
$V - S + F =$......



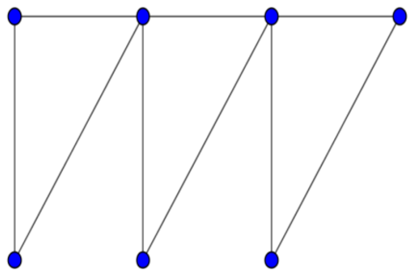
$V - S + F =$......



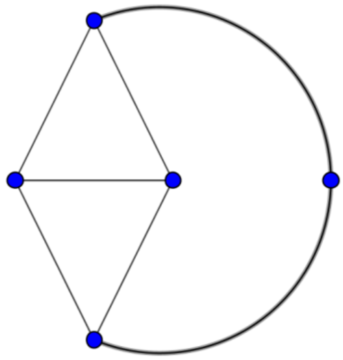
$V - S + F =$......



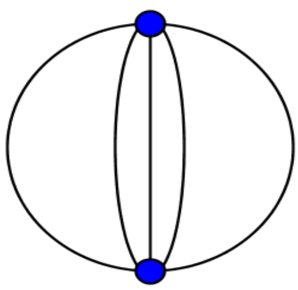
$V - S + F =$......



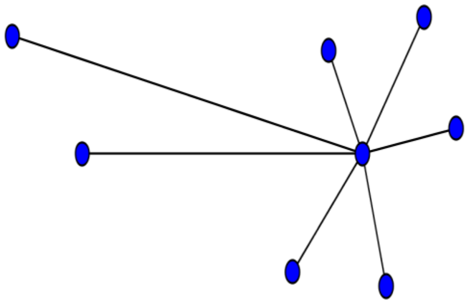
$V - S + F = \ldots\ldots$



$V - S + F = \ldots\ldots$



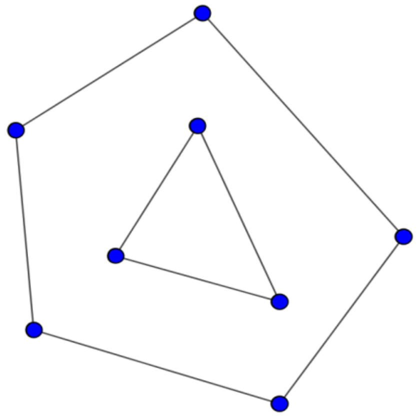
$V - S + F = \ldots\ldots$



$V - S + F = \ldots\ldots$

Che cosa osservate?

Considerate ora il seguente grafo planare.

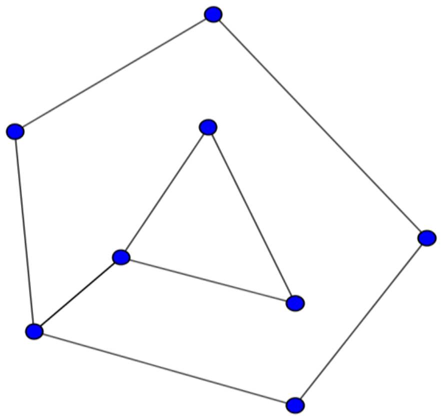


$V - S + F = \ldots\ldots$

Questo grafo è planare ma NON è CONNESSO.

<u>Definizione</u> (Grafo connesso)
Un grafo si dice connesso se da ogni vertice è possibile raggiungere qualunque altro vertice percorrendo i lati del grafo.

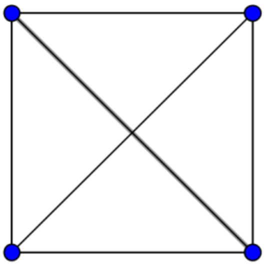
Potete connettere le due componenti aggiungendo uno spigolo.



Quanto vale ora la caratteristica di Eulero?

$V - S + F = \ldots\ldots$

Considerate ora il grafo seguente.



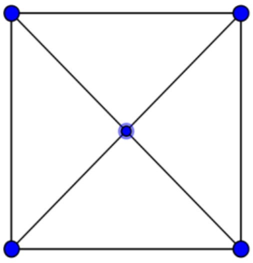
Questo grafo è connesso ma presenta due spigoli che si incrociano.

$$V - S + F = \ldots\ldots$$

È possibile rendere planare il grafo precedente (cioè è possibile rappresentarlo sul piano facendo in modo che i suoi spigoli non si intersechino al di fuori dei vertici):

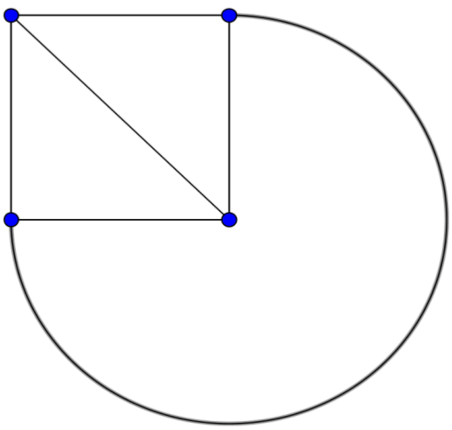
a) o aggiungendo un vertice nel punto di intersezione
b) o muovendo uno dei due spigoli in modo tale che esso colleghi comunque i due vertici senza però intersecare l'altro spigolo.

<u>Caso a)</u>



$$V - S + F = \ldots\ldots$$

<u>Caso b)</u>



$$V - S + F = \ldots\ldots$$

Ricapitolando …

- I grafi di pagina 1 e 2 sono tutti planari connessi. Essi hanno caratteristica di Eulero ……

- Il primo grafo di pagina 3 è planare ma non connesso. Esso ha caratteristica di Eulero ……
  Se lo rendiamo connesso, la caratteristica di Eulero diventa ……

- Il primo grafo di pagina 4 è connesso ma ha due lati che si incrociano. Esso ha caratteristica di Eulero ……
  Se lo rendiamo planare, la caratteristica di Eulero diventa ……

Alla luce di quanto appena visto, completate l'enunciato del teorema seguente. Si tratta di un teorema molto importante.

TEOREMA Per tutti i grafi ……………………………………… $V - S + F =$……

Provate ora a dimostrare il teorema!

Dimostrazione

Passo 1
Considerate un grafo con un solo nodo.

Questo grafo è planare connesso?

Calcolatene la caratteristica di Eulero $V - S + F =$………

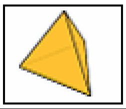
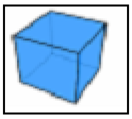
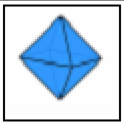
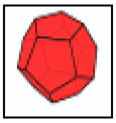
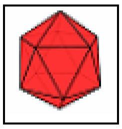
Passo 2
Ogni grafo planare connesso può essere costruito a partire dal precedente (quello con un solo nodo). Come?

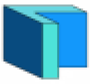
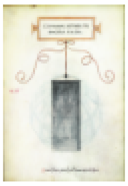
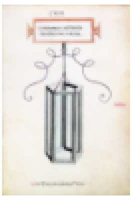
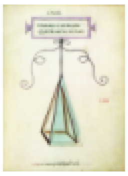
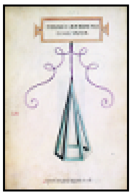
E cosa potete dedurre sulla caratteristica di Eulero?

Caratteristica di Eulero di poliedri “convenzionali”

<u>Definizione</u> Un **poliedro** è un solido delimitato da un numero finito di poligoni piani, detti facce del poliedro.

- Per ognuno dei poliedri nelle tabelle qui sotto calcolate $V - S + F$, dove V è il numero di vertici, S il numero di spigoli e F il numero di facce del poliedro.

		V	**S**	**F**	**V-S+F**
	tetraedro				
	cubo				
	ottaedro				
	dodecaedro	20	30	12	
	icosaedro	12	30	20	

		V	S	F	V-S+F
	poliedro blu				
	prisma a base triangolare				
	prisma a base pentagonale				
	prisma a base un n-gono				
	piramide a base quadrata				
	piramide a base esagonale				
	piramide a base un n-gono				

Che cosa osservate?

- Assumendo che la superficie del poliedro sia fatta di gomma, togliete una faccia e deformate la superficie rimasta fino a stenderla su un piano.
  Che cosa ottenete? A che cosa corrisponde la faccia che è stata tolta?
  Una volta fatto ciò, dovreste riuscire a capire perché per i poliedri visti finora vale la relazione di Eulero.

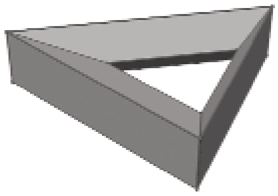
Caratteristica di Eulero di grafi non planari e poliedri “non convenzionali”

Finora avete considerato grafi planari e poliedri “convenzionali”
Ora invece lavorerete con grafi non planari e poliedri “non convenzionali”.

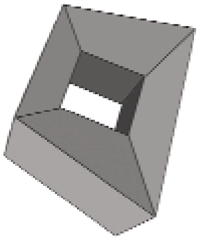
- Avete visto che il problema delle tre case si risolve su un toro (una ciambella).
  Ora calcolatene la caratteristica di Eulero $V - S + F$, dove V è il numero di vertici, S il numero di spigoli e F il numero di regioni in cui il grafo divide il toro.

  <u>Suggerimento</u>
  Può essere d’aiuto realizzare un toro con un foglio di carta. Prendete un foglio di carta ed incollate i lati opposti. Quello che ottenete è un toro. Su di esso disegnate le tre case e le tre forniture e collegate ciascuna delle tre case con ciascuna delle tre forniture in modo tale che le linee non si incrocino.

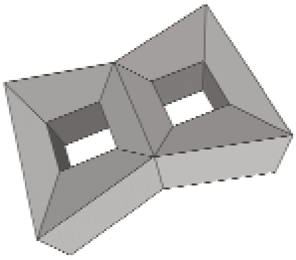
- Considerate i seguenti poliedri “non convenzionali” e calcolatene la caratteristica di Eulero.
  I primi due hanno un buco (quindi sono un toro perché deformabili nella classica forma a ciambella), mentre l’ultimo ha due buchi.



POLIEDRO A



POLIEDRO B



POLIEDRO C

	V	S	F	V-S+F
Grafo tre case	**6**	**9**		
Poliedro A	**9**	**18**		
Poliedro B		**32**	**16**	
Poliedro C		**60**	**30**	

- Con un po' di sforzo è possibile capire cosa succede nel caso di poliedri (e in generale di superfici) che presentano dei buchi.
  La caratteristica di Eulero di una superficie è:

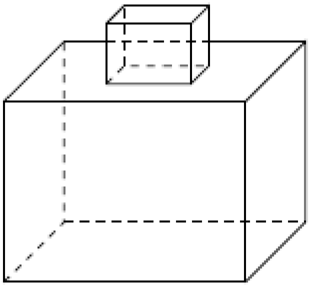
  $$Caratteristica\ di\ Eulero = 2 - 2g,$$

  dove g è ……………………………………………………………………………………

Quali poliedri hanno caratteristica di Eulero 2?

Sicuramente un poliedro per avere caratteristica di Eulero 2 deve essere privo di buchi ($g = 0$).

Ma è sufficiente ipotizzare che il poliedro sia privo di buchi per essere sicuri che valga la relazione di Eulero $V - S + F = 2$?



Considerate ora il seguente poliedro "a torretta".

Esso è privo di buchi ma ha una FACCIA con un buco (si dice che la faccia NON è SEMPLICEMENTE CONNESSA).

Calcolatene la caratteristica di Eulero:

$$V - S + F = \ldots\ldots$$

Ricapitolando …

- I poliedri di pagina 7 e 8 sono tutti privi di buchi e con facce semplicemente connesse. Essi hanno tutti caratteristica di Eulero ………

- I poliedri A, B, C presentano dei buchi. Essi hanno caratteristica di Eulero …………………

- Il poliedro "a torretta" ha una faccia non semplicemente connessa (cioè con un buco). Esso ha caratteristica di Eulero ………

<u>TEOREMA</u> Tutti i poliedri senza …………… e con facce ……………………………………
hanno caratteristica di Eulero ………

Ma perché per alcuni poliedri vale la relazione di Eulero e per altri no?

Suggerimento

Come prima assumete che la superficie dei poliedri sia fatta di gomma, togliete una faccia e deformate la superficie rimasta fino a stenderla su un piano.

È sempre possibile fare ciò per ogni poliedro?

Che cosa ne deducete per quanto riguarda la caratteristica di Eulero?