ALMA MATER STUDIORUM – UNIVERSITÀ DI BOLOGNA
DIPARTIMENTO DI MATEMATICA
PIANO LAUREE SCIENTIFICHE

DOCENTE: Rossella Rimondi
TUTOR: Sara Querzè

I GRAFI: lezione 1

L'origine storica della **teoria dei grafi** viene fatta risalire al **1736**, anno in cui il matematico svizzero Eulero risolse il problema dei **ponti di Königsberg**.

Il problema dei ponti di Königsberg

Königsberg è attraversata dal fiume Pregel, che divide la città in quattro parti: due aree principali (A e B) e due isole (C e D). Le quattro zone della città sono collegate tra loro da sette ponti, come mostrato in Figura 1.

Curiosità All'epoca di Eulero la città di Königsberg apparteneva alla Prussia orientale. Attualmente appartiene alla Russia ed è nota con il nome di Kaliningrad. Alcuni dei suoi antichi ponti non esistono più oggi.

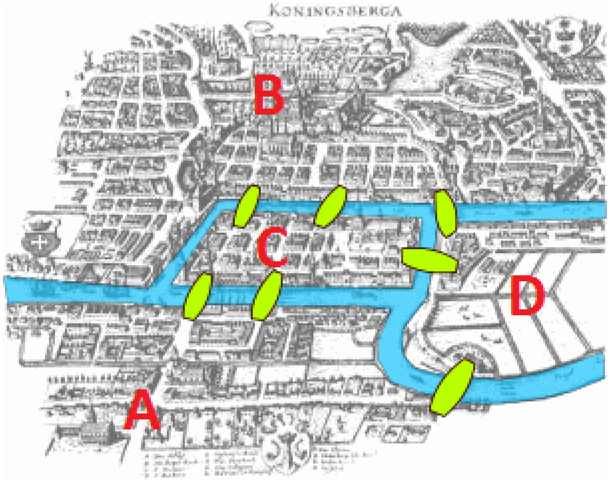


Figura 1

PROBLEMA È possibile fare una passeggiata in modo tale da attraversare tutti i ponti una sola volta?

Attività 1 In classe abbiamo affrontato il problema svolgendo l'Attività 1 (vedi cartella Attività).

SOLUZIONE

Eulero schematizzò la situazione rappresentando:

- le quattro *zone della città* con quattro *punti* (denotati con le lettere A, B, C, D);

- ogni *ponte* con una *linea* avente per estremi i due punti corrispondenti alle due zone collegate dal ponte stesso.

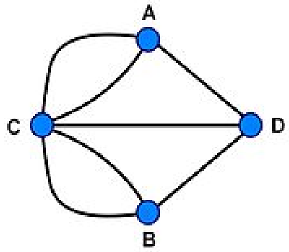


Figura 2

Una figura di questo tipo si chiama grafo.
Definizione Un ***GRAFO*** è un insieme di ***vertici*** (o *nodi*) collegati da ***lati*** (o *spigoli* o *archi*).

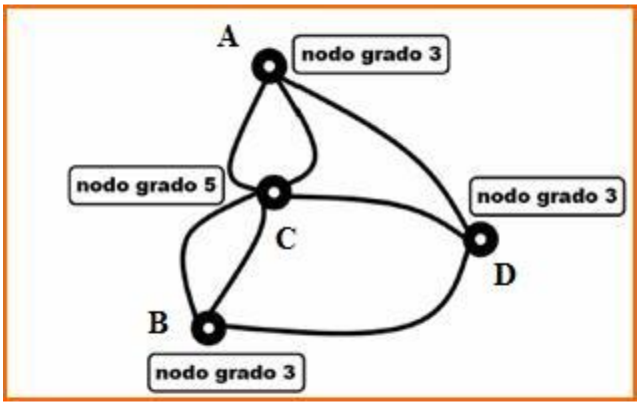
Nota Il termine "lati" che compare nella definizione di grafo può creare confusione. Per lati infatti non intendiamo ciò che intendiamo solitamente quando parliamo dei lati di un poligono, cioè non intendiamo esclusivamente dei segmenti. Il lato di un grafo è un cammino che collega una coppia di vertici e tale cammino non è necessariamente rettilineo.

Torniamo alla soluzione del problema …

Eulero ricondusse il problema dei ponti di Königsberg al grafo che rappresenta la città: capì cioè che il problema consiste di fatto nel ricercare, nel grafo di Figura 2, un cammino che passi una ed una sola volta per ogni spigolo.

Eulero fu il primo a formalizzare un problema di apparente natura geometrica in termini del tutto indipendenti da concetti quali la misura di segmenti o di angoli. L'estensione delle varie aree della città e la lunghezza dei ponti sono infatti irrilevanti ai fini del problema, l'unica cosa che conta è la "rete" di collegamenti che essi formano.

Il numero di archi che escono da un nodo si chiama **grado** del nodo.



Quando si dice "nodo pari" o "nodo dispari" si intende rispettivamente "nodo di grado pari" o "nodo di grado dispari".

Ora entriamo nel "clou" del problema. In un primo momento vediamo una soluzione che potremmo definire intuitiva, successivamente invece adottiamo un approccio più rigoroso.

<u>Soluzione intuitiva</u>
Ciascuno dei tre punti A, B, D è collegato al resto da tre ponti, per cui in ognuno di essi è possibile soltanto uscire-entrare-uscire oppure entrare-uscire-entrare. Ognuno di essi perciò deve essere necessariamente un punto di inizio o di fine del percorso. Poiché una linea può avere solamente un punto di inizio ed un punto di fine, non possono essercene tre e quindi il problema non è risolvibile.

<u>Soluzione rigorosa</u>
Si deve a Eulero il seguente **<u>TEOREMA</u>**:

1. un qualsiasi grafo è percorribile, passando per ogni spigolo una ed una sola volta e **ritornando al punto di partenza**, se e solo se ha ***tutti i nodi di grado pari***;
2. un qualsiasi grafo è percorribile, passando per ogni spigolo una ed una sola volta ma **senza ritornare al punto di partenza**, se e solo se contiene nodi pari e ***soltanto due nodi dispari*** (i due nodi di grado dispari devono essere necessariamente uno il punto di inizio e l'altro il punto di fine del percorso);
3. un grafo che contiene ***più di due nodi dispari*** **non** è **percorribile**, **senza sovrapposizioni** di percorso.

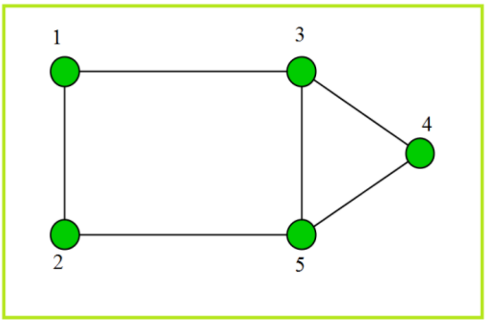
Eulero, applicando questo teorema al grafo di Figura 2 che rappresenta la città di Königsberg, dimostrò che non esiste alcun percorso che consenta di attraversare tutti e sette i ponti una sola volta, essendo i quattro nodi del grafo tutti di grado dispari.

Dunque il **problema dei ponti di Königsberg non ha soluzione**. In Matematica non tutti i problemi hanno soluzione e questo ne è un esempio.

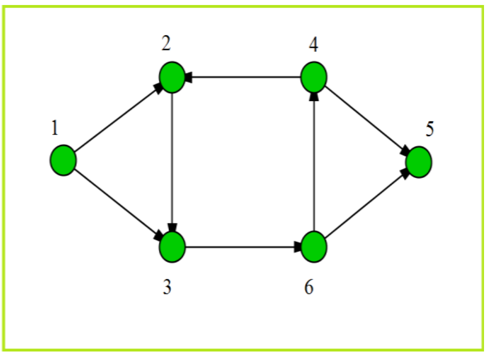
Se avessimo voluto usare un linguaggio formale, avremmo dovuto dire che nel grafo che rappresenta la città non esiste né un <u>cammino euleriano</u> né un <u>circuito euleriano</u>.

Ma che cosa si intende per cammino euleriano e circuito euleriano?
Vediamo alcune definizioni …

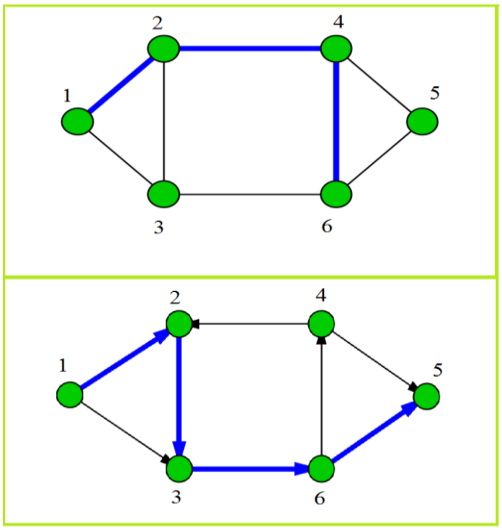
Un **grafo** è definito da una coppia (V, L), dove V è l'insieme dei vertici e L l'insieme degli spigoli.



Se il grafo è **non orientato**, gli spigoli sono coppie (non ordinate) di vertici.

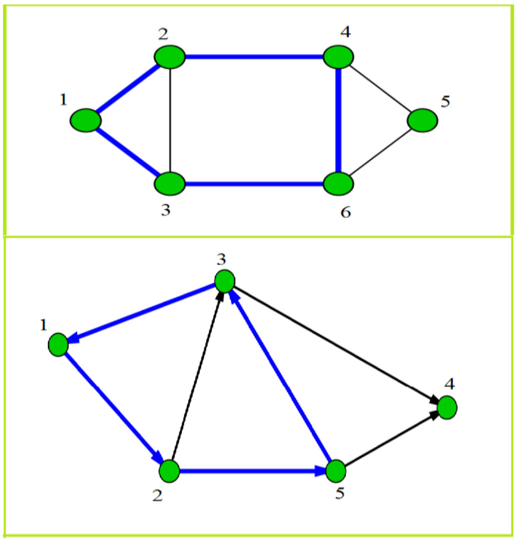


Se il grafo è **orientato**, gli spigoli sono coppie ordinate di vertici.



Un ***cammino*** (o ***catena*** se il grafo non è orientato) da A a B è un insieme ordinato di nodi, con inizio in A e termine in B, tale che per ogni coppia di nodi consecutivi dell'insieme esista un arco del grafo che colleghi i nodi stessi (sequenza di archi consecutivi).

- Un cammino **semplice** è un cammino che non passa due volte per lo stesso spigolo.
- Un cammino **chiuso** è un cammino in cui gli estremi coincidono.



Un ***circuito*** (o **ciclo**) è un cammino semplice e chiuso.

Un **cammino euleriano** è un cammino semplice che passa per ogni arco una sola volta.

Un **circuito euleriano** è un cammino euleriano chiuso.

__**Esercizio 1**__ Nel primo esercizio trovate alcune variazioni del problema dei ponti di Königsberg (vedi alla fine di questo documento). Provate a rispondere ai quesiti proposti!

I grafi e la topologia

I **grafi** sono **oggetti topologici**. Il problema dei ponti di Königsberg infatti, oltre ad essere considerato il problema che ha dato origine alla teoria dei grafi, è considerato anche il problema che ha segnato la nascita della topologia.

La **topologia** è la branca della Matematica che studia le *proprietà* delle figure e delle forme *invarianti rispetto a deformazioni senza strappi, sovrapposizioni o incollature*. Ma che cosa si intende per invarianti? Una certa proprietà è invariante rispetto ad una determinata deformazione se non cambia dopo che tale deformazione è stata effettuata.

Dunque dal punto di vista topologico sono equivalenti due oggetti che possono essere deformati l'uno nell'altro senza ricorrere ad alcuna incollatura, strappo o sovrapposizione. Deformazioni di questo tipo trasformano un dato grafo in un grafo avente lo stesso numero di vertici e in cui inoltre si mantengono gli stessi collegamenti (cioè i lati del grafo "deformato" collegano tutte e sole le coppie di vertici che risultano collegate anche nel grafo "non deformato").
Ricapitolando, due grafi sono equivalenti se:

- hanno lo stesso numero di vertici;
- i lati collegano le stesse coppie di vertici.

Due grafi equivalenti rappresentano quindi una medesima situazione, ma non sono necessariamente identici. Può succedere infatti che due grafi equivalenti ci appaiano diversi "visivamente" (anzi quasi sempre è così) perché in uno dei due grafi i vertici risultano spostati e/o i lati che collegano i vertici risultano deformati. In termini di equivalenza non conta dunque se un lato è rettilineo o curvo e neppure se un vertice sta da una parte o dall'altra rispetto ad un collegamento di vertici vicini, l'importante è che si mantengano i collegamenti effettivi.

Esercizio 2 Nel secondo esercizio vi viene richiesto di riconoscere grafi equivalenti e di costruire inoltre grafi equivalenti ad un grafo dato (vedi alla fine di questo documento).

Qualche esempio

Prima di proseguire con la trattazione vediamo un esempio di grafo tratto dalla vita reale.

L’immagine qui sopra è la mappa della metropolitana di Londra.

La prima cosa che salta all’occhio è la regolarità delle varie linee … nella realtà questi percorsi sono completamente diversi da quelli rappresentati nella mappa. Un normale cittadino non si preoccupa dell’effettivo percorso che compie la metropolitana, quello a cui è interessato sono le fermate. La mappa dà come unica informazione le tappe e i collegamenti.

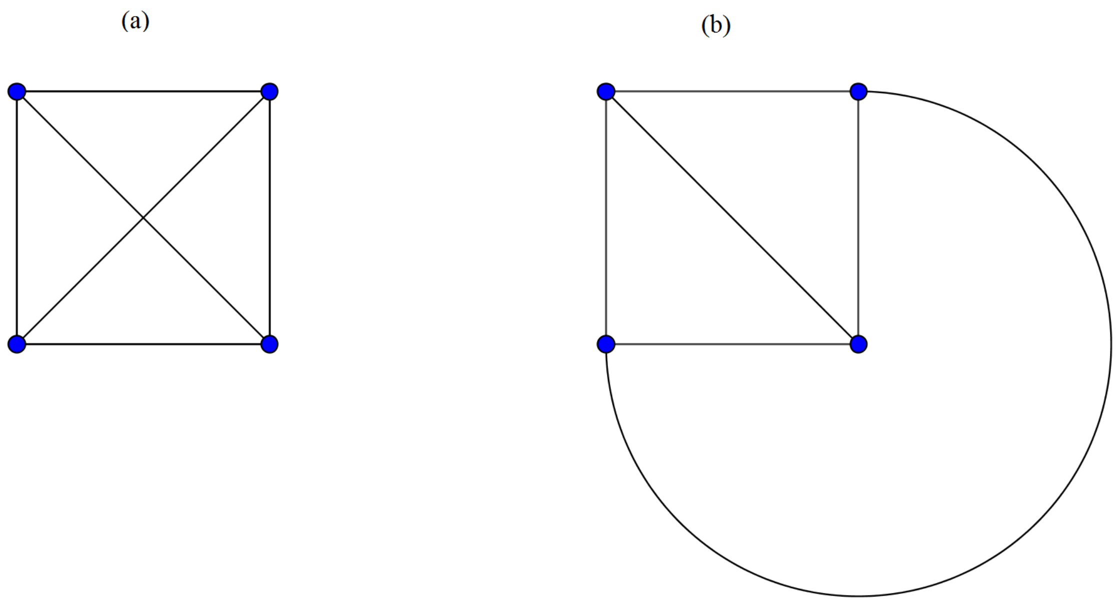
Uno schema di questo tipo è un grafo, dove le *tappe* sono i *nodi* e i *collegamenti* i *lati*.

Esercizio 3 Vi vengono in mente altri esempi di grafi? Provate a scriverne qualcuno!

Grafi planari e problema delle tre case

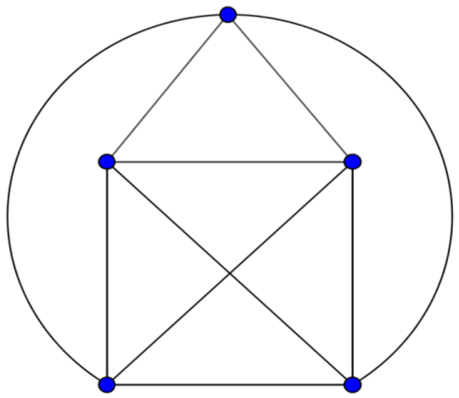
Definizione Un ***grafo*** è ***planare*** (o *piano*) se è possibile rappresentarlo su un piano in modo tale che i suoi spigoli non si intersechino al di fuori dei vertici.

Esempio 1



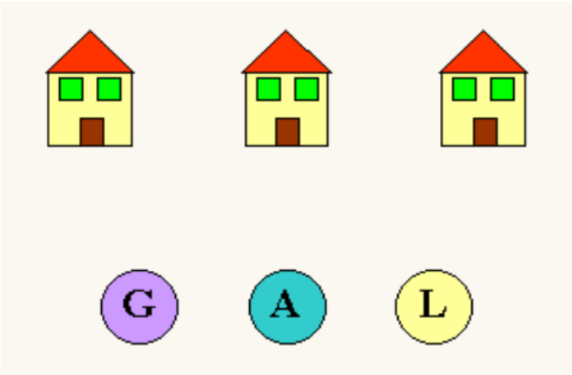
Il grafo (a) presenta due lati che si intersecano al di fuori dei vertici. È comunque possibile renderlo planare muovendo una delle due diagonali in modo tale che essa colleghi i due vertici senza però intersecare l'altra diagonale (vedi grafo (b)).

Esempio 2



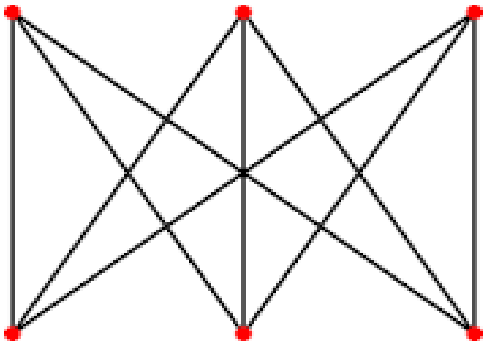
Questo grafo presenta due lati che si intersecano al di fuori dei vertici ma, a differenza del grafo precedente, questo non è planare perché comunque lo si disegni vi è sempre un incrocio di lati.

PROBLEMA Ci sono tre case e tre forniture: una di gas, una di acqua e una di elettricità.
È possibile collegare ciascuna delle tre case con ciascuna delle tre forniture in modo tale che le tubature non si incrocino tra loro?



Tradotto in termini geometrici, il problema è il seguente: dati tre punti qualsiasi di un piano (rappresentati dalle tre case), collegare ciascuno di essi con altri tre punti qualsiasi dello stesso piano (rappresentati dalle tre forniture) mediante delle linee, indifferentemente curve o rette, in modo tale che nessuna di queste ne incroci un'altra.

Anche questo problema può essere riformulato facendo riferimento ad un grafo.



Il grafo qui sopra è il grafo che rappresenta la situazione descritta dal problema.
Esso si chiama *grafo bipartito completo* con 3+3 nodi $K_{3,3}$; è anche detto grafo $K_{3,3}$ di *Kuratowski* in onore del matematico polacco Kazimierz Kuratowski, il quale diede importanti contributi in teoria dei grafi.

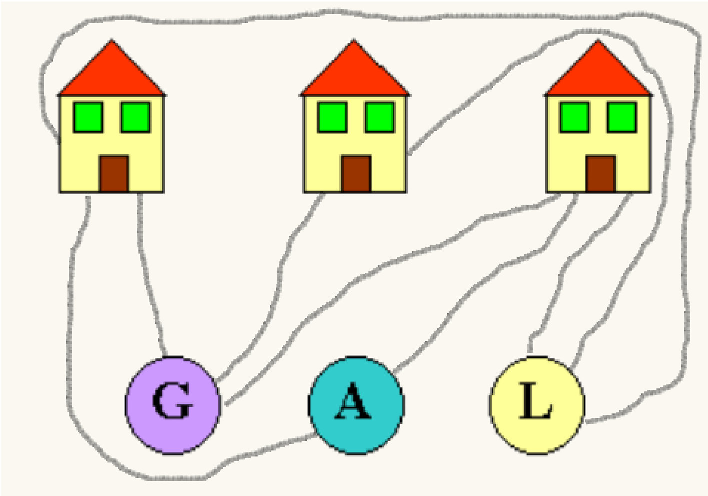
Il problema delle tre case diventa il seguente: il grafo $K_{3,3}$ è planare?

Attività 2 In classe abbiamo affrontato il problema svolgendo l'Attività 2 (vedi cartella Attività).

SOLUZIONE
Per il momento disegniamo solo otto dei nove collegamenti che occorrono, cioè quelli che congiungono (senza incrociarsi):

- la prima casa con la fornitura di gas;
- la prima casa con la fornitura di acqua;
- la prima casa con la fornitura di elettricità;
- la seconda casa con la fornitura di gas;
- la seconda casa con la fornitura di elettricità;
- la terza casa con la fornitura di gas;

- la terza casa con la fornitura di acqua;
- la terza casa con la fornitura di elettricità.



È possibile disegnare sul foglio il nono collegamento (seconda casa – fornitura di acqua) in modo tale che esso non intersechi gli altri? Dalla figura è evidente che ciò non è possibile.
Dunque il problema delle tre case non ha soluzione nel piano.

Il problema delle tre case ha soluzione su una sfera?
Non ha soluzione nemmeno su una sfera.
Un problema infatti **ha soluzione sul piano se e solo se ha soluzione su una sfera**. Perché? Consideriamo un grafo su una sfera e consideriamo un punto della sfera che non appartiene né ad un lato né ad un vertice del grafo. Possiamo bucare la sfera in quel punto e, immaginando che sia fatta di una pellicola elastica, spalmarla sul piano. Quello che otteniamo è un grafo sul piano. Il fatto di aver tolto un punto della sfera non appartenente né ad un lato né ad un vertice ci garantisce che il numero dei vertici sia lo stesso e anche che i collegamenti siano immutati. A questo punto è evidente che un problema che non ha soluzione sul piano non ha soluzione nemmeno su una sfera, e viceversa.

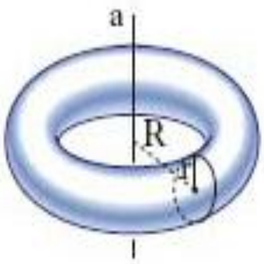
E se non richiedessimo che il problema delle tre case debba avere soluzione nel piano? Sarebbe possibile realizzare il collegamento mancante?
Non essendo più costretti a rimanere sul piano (cioè sul foglio di carta), potremmo costruire un manico (per intenderci, un ponte sopraelevato) che connetta la seconda casa con la fornitura di acqua così da non intersecare gli altri collegamenti. Il problema risulterebbe risolto.

Dunque il **problema delle tre case non ha soluzione sul piano, ma su una superficie con un buco sì**. Una tale superficie si chiama **toro**.

Il toro è una superficie a forma di ciambella.

Figura 3

Si ottiene facendo ruotare una circonferenza intorno ad un asse di rotazione appartenente allo stesso piano della circonferenza ma disgiunto da questa.



Il toro è un **oggetto topologico**.

Abbiamo già detto che dal punto di vista topologico sono equivalenti due oggetti che possono essere deformati l'uno nell'altro senza ricorrere ad alcuna incollatura, strappo o sovrapposizione. Per esempio una sfera piccola e una sfera grossa sono la stessa cosa dal punto di vista topologico. Ma c'è di più: una sfera è topologicamente equivalente anche ad un cubo (cioè sono *omeomorfi*). Una sfera e un toro invece non sono omeomorfi perché il toro contiene un buco che non può essere eliminato da alcuna deformazione.

Alla luce di ciò possiamo dire che una superficie, affinché sia un toro, non deve necessariamente assumere la forma di Figura 3. L'importante è che abbia un solo buco e che sia possibile deformarla nella classica forma a ciambella senza ricorrere ad incollature, strappi o sovrapposizioni.
A tal proposito l'immagine qui sotto ci mostra come *una qualsiasi tazza con un manico* sia anch'essa un *toro*, in quanto deformabile nella classica forma a ciambella senza bisogno di incollature, strappi o sovrapposizioni.

Sono riportati qui i testi degli esercizi 1 e 2.

Esercizio 1: variazioni del problema dei ponti di Königsberg

Sulla riva settentrionale della città sorge il castello del **principe Blu** e sulla riva meridionale quello del **principe Rosso**. Sull'isola orientale vi è la **chiesa**, sede del Vescovo. Infine nell'isola centrale si trova un'**osteria.**

L'ottavo ponte del principe Blu

Il principe Blu, dopo aver analizzato la situazione, si convince dell'impossibilità di effettuare una passeggiata in modo tale da attraversare tutti i ponti una sola volta.
Decide allora di costruire un ottavo ponte che gli permetta di partire dal suo castello e giungere fino all'osteria attraversando tutti i ponti; inoltre fa in modo che il principe Rosso non riesca a fare altrettanto partendo dal suo castello.

- **Dove costruisce l'ottavo ponte il principe Blu?**

Il nono ponte del principe Rosso

Il principe Rosso reagisce alla mossa del principe Blu costruendo a sua volta un altro ponte che gli consenta di partire dal suo castello e giungere fino all'osteria attraversando tutti i ponti; anch'egli fa in modo che il Principe Blu non possa attraversare i ponti alla sua maniera.

- **Dove costruisce il nono ponte il Principe Rosso?**

Il decimo ponte del Vescovo

Il Vescovo, per ristabilire la quiete cittadina, decide di costruire un decimo ponte che consenta a chiunque di percorrere tutti i ponti.

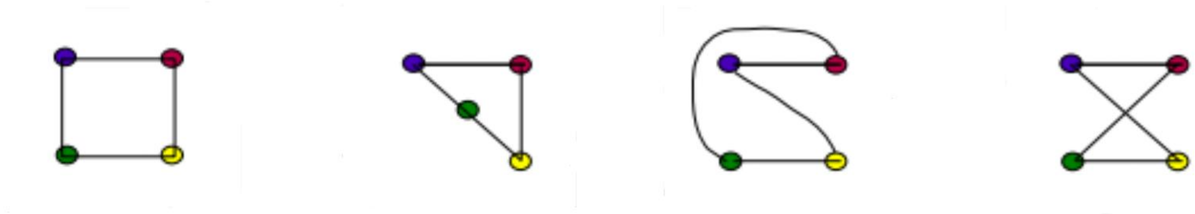
- **Dove costruisce il decimo ponte il Vescovo?**

Esercizio 2: grafi equivalenti

Due grafi sono equivalenti se:

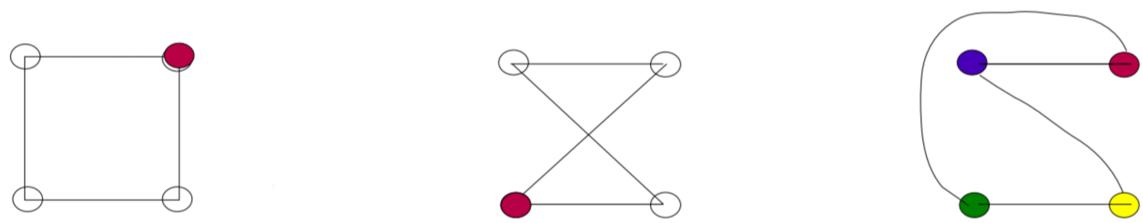
- *hanno lo stesso numero di vertici e di lati;*
- *i lati collegano le stesse coppie di vertici.*

1. Osserva le figure e individua i grafi equivalenti.



1 2 3 4

2. Colora i punti bianchi in modo che i primi due grafi siano equivalenti al terzo. È possibile?



3. Collega i punti colorati in modo da ottenere un grafo equivalente a quello sulla sinistra.