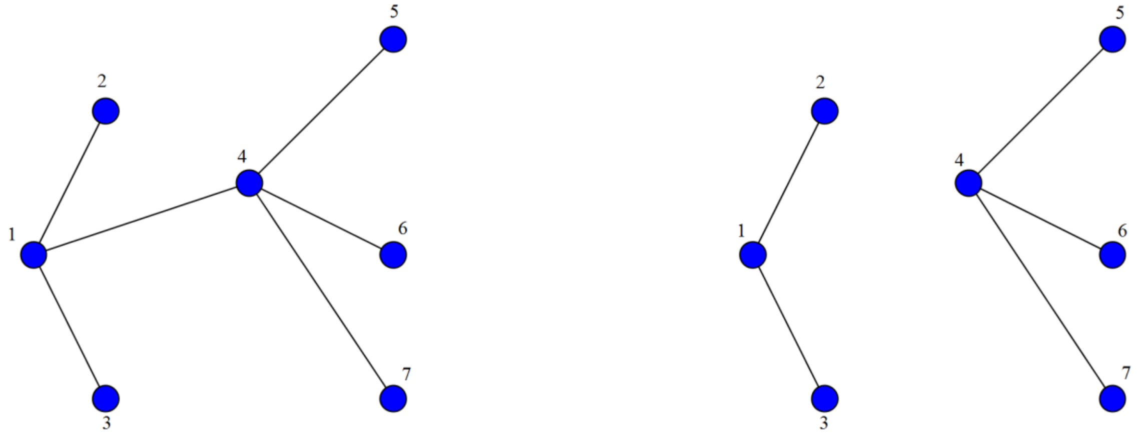
ALMA MATER STUDIORUM – UNIVERSITÀ DI BOLOGNA
DIPARTIMENTO DI MATEMATICA
PIANO LAUREE SCIENTIFICHE

DOCENTE: Rossella Rimondi
TUTOR: Sara Querzè

I GRAFI: lezione 2

Definizione Un grafo è **connesso** se da ogni vertice è possibile raggiungere qualunque altro vertice percorrendo i lati del grafo.



(a) (b)

Il grafo (a) è connesso, mentre il grafo (b) non lo è perché non è possibile andare ad esempio dal nodo 1 al nodo 5 percorrendo i lati del grafo.

La caratteristica di Eulero: un numero per distinguere le superfici

Consideriamo un grafo. Sia V il numero di vertici, S il numero di spigoli e F il numero di regioni del grafo. La **caratteristica di Eulero** del grafo è il numero $\boldsymbol{V - S + F}$.

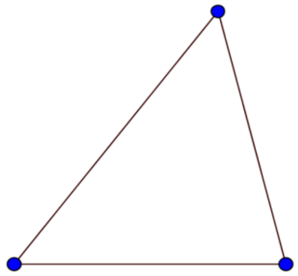
Attività 3 In classe abbiamo affrontato l'argomento svolgendo l'Attività 3 (vedi cartella Attività).

Caratteristica di Eulero di grafi planari

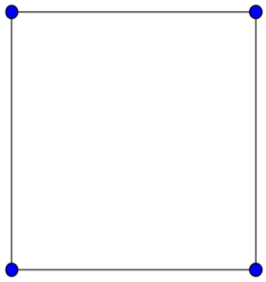
Per il momento consideriamo grafi planari, cioè grafi che si possono disegnare su un foglio di carta senza che i loro spigoli si intersechino al di fuori dei vertici.

Qui sotto vi sono degli esempi. Per ognuno di essi calcoliamo la caratteristica di Eulero.

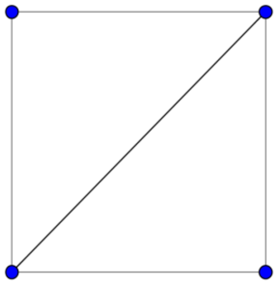
Per quanto riguarda il conto delle regioni, considerate anche la regione esterna illimitata.



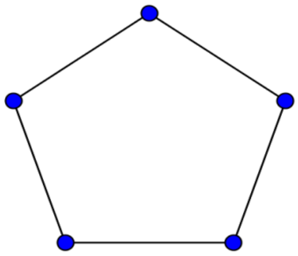
$$V - S + F = 3 - 3 + 2 = 2$$



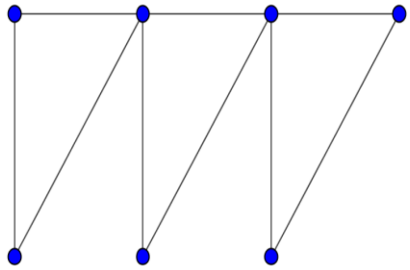
$$V - S + F = 4 - 4 + 2 = 2$$



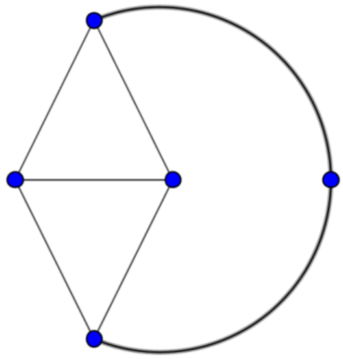
$$V - S + F = 4 - 5 + 3 = 2$$



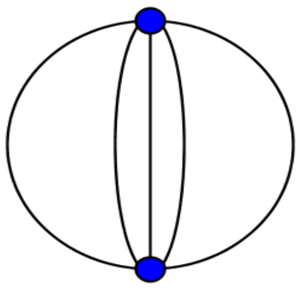
$$V - S + F = 5 - 5 + 2 = 2$$



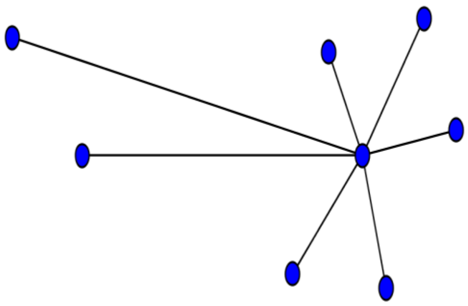
$$V - S + F = 7 - 9 + 4 = 2$$



$$V - S + F = 5 - 7 + 4 = 2$$



$$V - S + F = 2 - 5 + 5 = 2$$

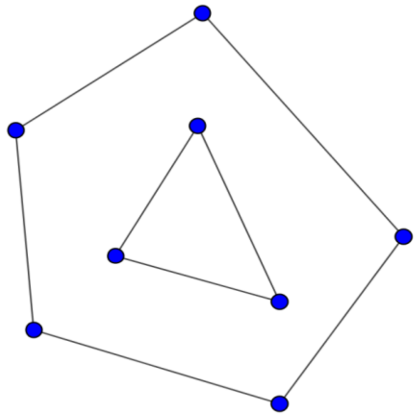


$$V - S + F = 8 - 7 + 1 = 2$$

Osserviamo che la caratteristica di Eulero vale sempre 2!

Sarà così per tutti i grafi? Vediamo altri esempi …

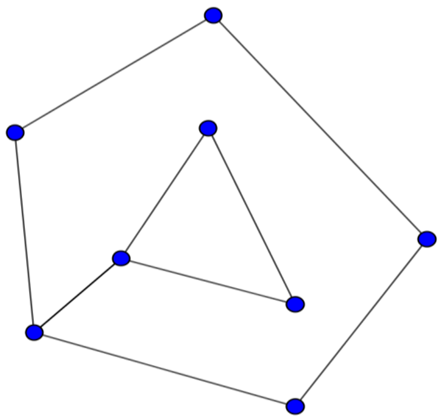
Consideriamo il seguente grafo planare.



Questo grafo NON è CONNESSO.

$$V - S + F = 8 - 8 + 3 = 3$$

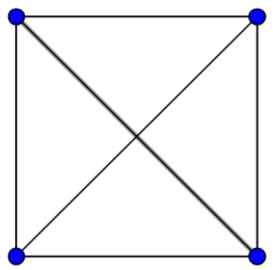
Possiamo connettere le due componenti aggiungendo uno spigolo.



Quanto vale ora la caratteristica di Eulero?

$$V - S + F = 8 - 9 + 3 = 2$$

Consideriamo ora il grafo seguente.



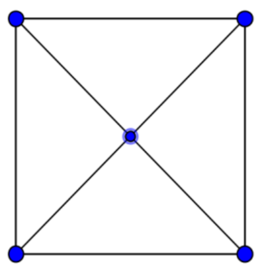
In questo grafo due spigoli si incrociano tra loro.

$$V - S + F = 4 - 6 + 5 = 3$$

È possibile rendere planare il grafo precedente (cioè è possibile rappresentarlo sul piano facendo in modo che i suoi spigoli non si intersechino al di fuori dei vertici):

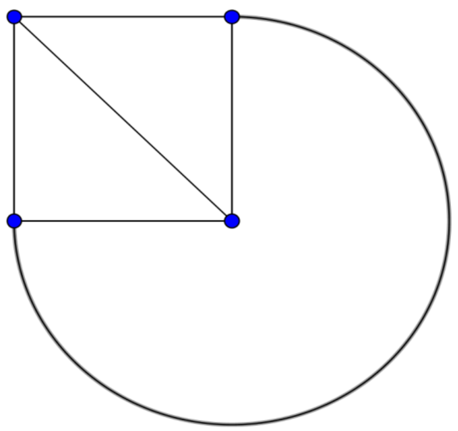
a) o aggiungendo un vertice nel punto di intersezione
b) o muovendo uno dei due spigoli in modo tale che esso colleghi comunque i due vertici senza però intersecare l'altro spigolo.

Caso a)



$$V - S + F = 5 - 8 + 5 = 2$$

Caso b)



$$V - S + F = 4 - 6 + 4 = 2$$

Ricapitolando …

- I grafi di pagina 2 e 3 sono tutti planari connessi ed hanno tutti caratteristica di Eulero pari a 2.
- Il primo grafo di pagina 4 è planare ma non connesso (precisamente ha due componenti connesse). La sua caratteristica di Eulero è diversa da 2.
  Se aggiungiamo uno spigolo che colleghi un qualsiasi nodo di una componente connessa con un qualsiasi nodo dell'altra componente connessa, otteniamo un grafo connesso. Ovviamente lo spigolo che aggiungiamo non deve intersecare gli altri lati.
  Calcoliamo ora la caratteristica di Eulero del nuovo grafo: essa vale 2.
- Il primo grafo di pagina 5 è connesso ma ha due lati che si intersecano. La sua caratteristica di Eulero è diversa da 2.
  Vogliamo rendere planare il grafo. È possibile farlo:
  a) o aggiungendo un vertice nel punto di intersezione
  b) o muovendo uno dei due spigoli in modo tale che esso colleghi comunque i due vertici senza però intersecare l'altro spigolo.

  Osserviamo che in entrambi i casi la caratteristica di Eulero torna ad essere 2.

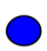
Alla luce di quanto appena visto, viene naturale pensare che per ogni grafo planare connesso $V - S + F = 2$.
La relazione $\boldsymbol{V - S + F = 2}$ è nota come **relazione di Eulero**.

Questa affermazione per il momento però non è certa, si tratta ancora solamente di una congettura.
Finora infatti ci siamo limitati a verificare che per i grafi planari connessi considerati la caratteristica di Eulero vale effettivamente 2. Abbiamo inoltre verificato che, facendo cadere l'ipotesi di planarità o l'ipotesi di connessione, la caratteristica di Eulero non è più 2.
Ma questo non ci assicura di non aver tralasciato qualche caso di grafo planare connesso per cui l'affermazione è falsa. Per attribuire all'affermazione lo status di teorema (cioè per essere sicuri che l'affermazione sia certa) dobbiamo fornire una dimostrazione.

<u>TEOREMA</u> Per ogni *grafo planare connesso* $V - S + F = 2$.

<u>Dimostrazione</u>

<u>Passo 1</u>
Consideriamo un grafo con un solo nodo.



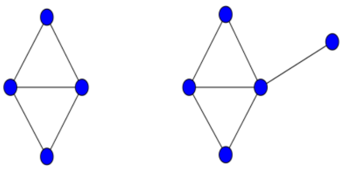
$V = 1$
$S = 0$
$F = 1$

È planare connesso e per esso vale $V - S + F = 2$.

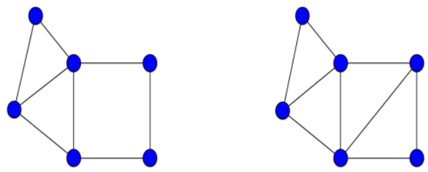
Passo 2

Ogni grafo planare connesso si costruisce a partire dal grafo precedente (quello con un solo nodo):

a) aggiungendo gradualmente nuovi nodi, ciascuno di essi connesso da un nuovo arco



b) aggiungendo gradualmente nuovi archi, in modo tale che ciascuno di essi ritagli una nuova regione da una vecchia



Nel caso a) la relazione $V - S + F = 2$ resta vera dal momento che il nuovo nodo e il nuovo arco si bilanciano.

Anche nel caso b) la relazione $V - S + F = 2$ resta vera poiché qui vi sono un nuovo arco e una nuova regione e anche questi si bilanciano l'un l'altra.

Dunque per ogni grafo connesso planare vale $V - S + F = 2$.

Caratteristica di Eulero di grafi non planari

Qui ci limitiamo a considerare solamente un caso particolare di grafo non planare (cioè di grafo che non si può disegnare su un foglio di carta): il grafo relativo al problema delle tre case. Nella scorsa lezione, infatti, abbiamo visto che il problema delle tre case non ha soluzione sul piano ma sul toro.
Calcoliamo la caratteristica di Eulero $V - S + F$, dove V è il numero di vertici, S il numero di spigoli e F il numero di regioni in cui il grafo divide il toro.

$V - S + F = 6 - 9 + 3 = 0$

Osserviamo che la caratteristica di Eulero è diversa da 2.

Caratteristica di Eulero di poliedri

Finora abbiamo parlato della caratteristica di Eulero di grafi (piani e non piani). Ora parleremo della caratteristica di Eulero dei poliedri.

Definizione Un **poliedro** è un solido delimitato da un numero finito di poligoni piani, detti facce del poliedro.

Un poliedro è concavo se se ha delle rientranze, convesso se non ne ha.
Se vogliamo essere più "matematici", possiamo dire che un poliedro è **convesso** se:

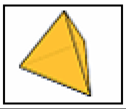
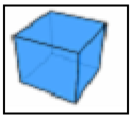
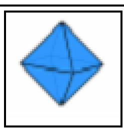
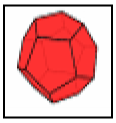
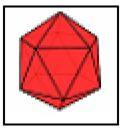
- ogni spigolo è comune esattamente a due facce;
- il piano di ciascuna faccia lascia tutte le rimanenti facce in uno dei due semispazi che individua.

Altrimenti è **concavo**.

Chiamiamo **regolare** un poliedro se le sue facce sono poligoni regolari uguali fra loro e in ogni vertice arriva lo stesso numero di facce. In un poliedro di questo tipo sia le facce che gli spigoli che i vertici sono indistinguibili.

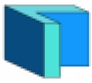
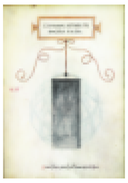
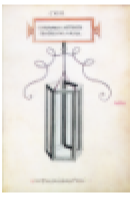
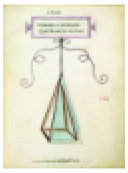
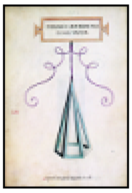
Esistono esattamente cinque poliedri regolari convessi, detti **poliedri platonici**: il tetraedro, il cubo, l'ottaedro, il dodecaedro, l'icosaedro.

Calcoliamo la caratteristica di Eulero $V - S + F$ dei cinque poliedri platonici. Indichiamo con V il numero di vertici, con S il numero di spigoli e con F il numero di facce del poliedro.

		V	S	F	V-S+F
	tetraedro	4	6	4	2
	cubo	8	12	6	2
	ottaedro	6	12	8	2
	dodecaedro	20	30	12	2
	icosaedro	12	30	20	2

La caratteristica di Eulero è sempre 2.

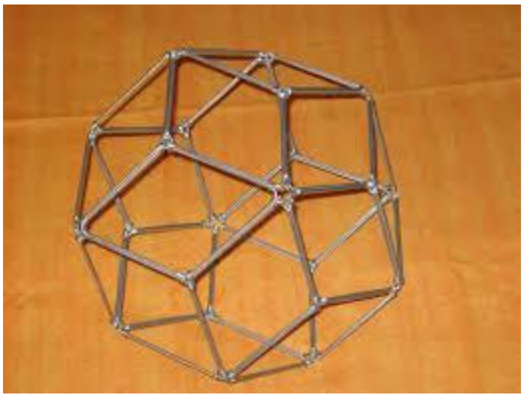
Ora calcoliamo la caratteristica di Eulero di altri poliedri, tra cui prismi e piramidi.

		V	S	F	V-S+F
	poliedro blu	12	18	8	2
	prisma a base triangolare	6	9	5	2
	prisma a base pentagonale	10	15	7	2
	prisma a base un n-gono	2n	3n	n+ 2	2
	piramide a base quadrata	5	8	5	2
	piramide a base esagonale	7	12	7	2
	piramide a base un n-gono	n + 1	2n	n + 1	2

Anche questi poliedri hanno caratteristica di Eulero uguale a 2.

Esiste un legame tra poliedri e grafi? È una coincidenza che i poliedri finora considerati abbiano la stessa caratteristica di Eulero dei grafi planari connessi?

Innanzitutto i vertici e gli spigoli di un poliedro formano un grafo, detto **scheletro** del poliedro.



Assumendo inoltre che la superficie del poliedro sia fatta di gomma, togliamo una faccia e deformiamo la superficie rimasta fino a stenderla su un piano. La figura che otteniamo è un grafo, in cui V e S sono immutati (cioè il poliedro ha lo stesso numero di vertici e di spigoli del corrispondente grafo sul piano). Anche F è immutato: la regione illimitata del grafo (quella esterna) corrisponde alla faccia del poliedro che è stata tolta, le altre regioni (quelle interne) corrispondono ognuna ad una delle rimanenti facce. Pertanto un poliedro e il corrispondente grafo sul piano hanno la stessa caratteristica di Eulero.

Vediamo come sono fatti i grafi che si ottengono deformando gli scheletri dei poliedri platonici e schiacciandoli su un piano.

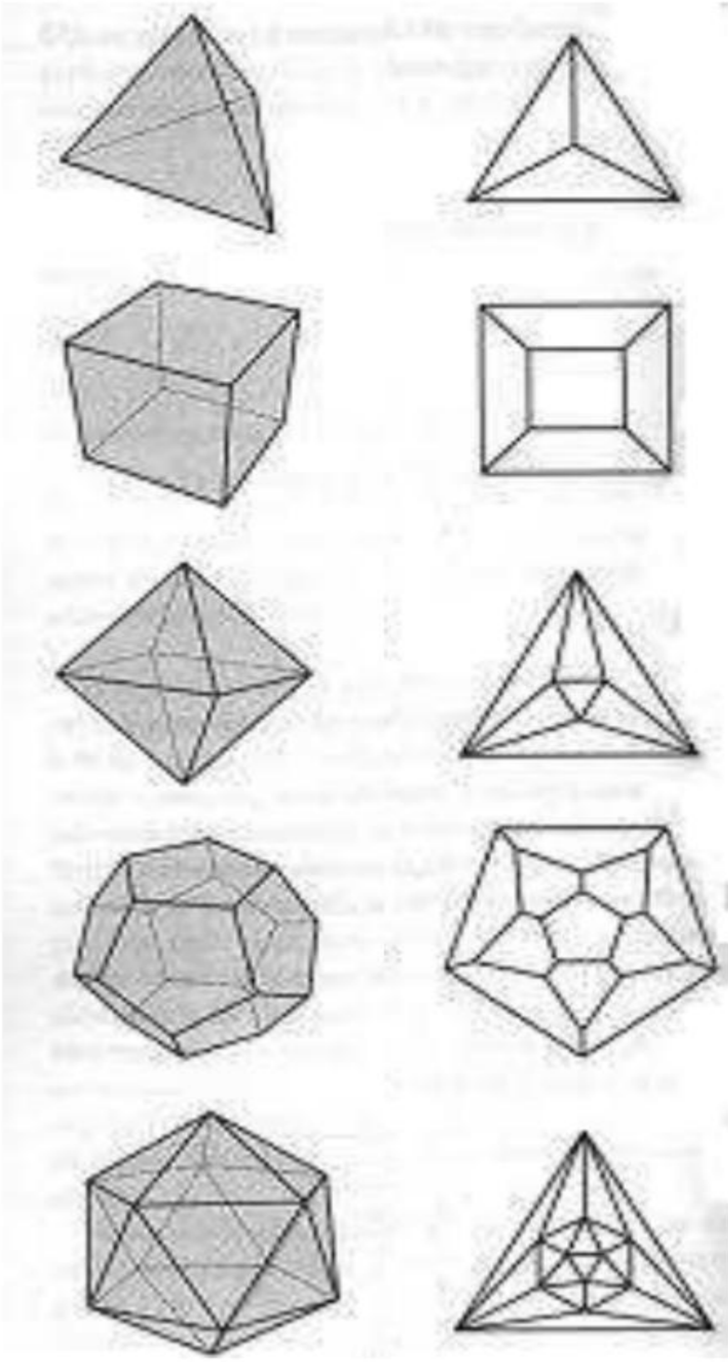


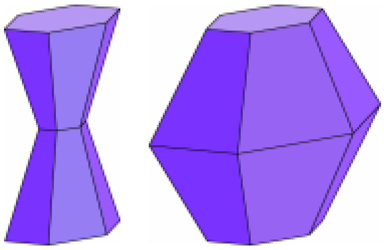
Figura 1

Dalla figura è evidente il perché i poliedri platonici abbiano caratteristica di Eulero pari a 2: per i poliedri platonici vale $V - S + F = 2$ perché i grafi che si ottengono schiacciando i poliedri sul piano (quelli a destra in Figura 1) sono tutti planari connessi.

Lo stesso discorso vale per i poliedri di pagina 9.

La relazione di Eulero vale per tutti i poliedri?

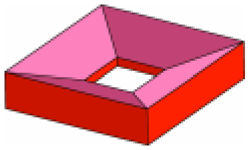
È stato in effetti un problema significativo quello di capire esattamente per quali poliedri valesse.

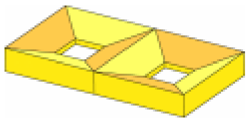


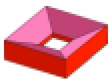
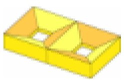
In un primo momento si pensò che fosse la convessità la proprietà discriminante dei poliedri, ma poi si comprese che non era così: per esempio i poliedri qui accanto sono ottenuti l'uno dall'altro mediante una "strozzatura" a livello della cintura, che evidentemente non cambia i numeri V, S, F; eppure uno dei due è convesso e l'altro no.

<u>Controesempio 1</u>

Consideriamo i due poliedri che vediamo qui a fianco: il poliedro rosso ha un buco, quello giallo ne ha due. Calcoliamo la caratteristica di Eulero $V - S + F$ e vediamo che in entrambi i casi è diversa da 2. Dunque questi poliedri non soddisfano la relazione di Eulero.





		V	S	F	V-S+F
	poliedro rosso	16	32	16	0
	poliedro giallo	28	60	30	-2

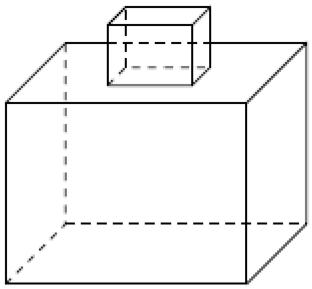
Osserviamo che per i poliedri rosso e giallo (in generale per i poliedri che presentano dei buchi) non è vero che, dopo aver tolto una faccia, possiamo deformare la superficie rimasta fino a stenderla su un piano. Perché? Perché, una volta schiacciato il poliedro, non è più possibile distinguere i buchi dalle facce. Dunque in questi due casi i grafi associati ai poliedri non sono planari.

<u>Definizione</u> Un poliedro si dice **semplice** se, tolta una sua faccia, può essere deformato sul piano.

Un poliedro semplice è dunque un poliedro senza buchi, il che equivale a dire che esso è topologicamente equivalente ad una sfera (cioè il poliedro è trasformabile in una sfera mediante una deformazione senza incollature, strappi o sovrapposizioni).

I poliedri convessi rientrano nella categoria dei poliedri semplici.

<u>Controesempio 2</u>



Consideriamo ora il poliedro "a torretta" qui a fianco e calcoliamo la sua caratteristica di Eulero:
$V - S + F = 16 - 24 + 11 = 3$.
Dunque anche questo poliedro non soddisfa la relazione di Eulero.

Il poliedro "a torretta" non ha buchi ma ha una faccia con un buco (cioè una faccia non semplicemente connessa).

<u>Definizione</u> Una faccia si dice **semplicemente connessa** se non ha buchi, cioè se ogni diagonale la divide in due parti.

Osserviamo che in questo caso la figura che si ottiene togliendo una faccia e deformando il poliedro sul piano è un grafo planare ma non connesso.

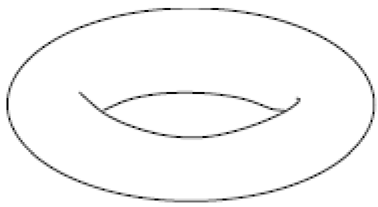
Alla luce di quanto appena visto concludiamo che: se, togliendo una faccia del poliedro e schiacciandolo sul piano, si ottiene un grafo planare connesso allora il poliedro ha caratteristica di Eulero 2. Questo equivale a dire che i poliedri semplici e con facce semplicemente connesse soddisfano la relazione di Eulero.

Come prima, per attribuire a tale affermazione lo status di teorema dovremmo fornire una dimostrazione. Qui però ci limitiamo solamente ad enunciare il teorema.

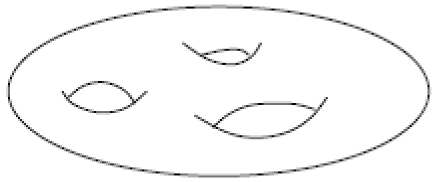
<u>TEOREMA</u> Per tutti i *poliedri semplici e con facce semplicemente connesse* $V - S + F = 2$.

Generalizzazione della relazione di Eulero

Con un po' di sforzo in più è anche possibile capire cosa succede nel caso di poliedri non semplici (o superfici non deformabili in una sfera).
Consideriamo una superficie con g buchi, detta superficie orientabile di genere g.



Superficie di genere 1.



Superficie di genere 3.

Si può dimostrare (noi non lo faremo) che per ogni *superficie orientabile di genere g*
$\boldsymbol{V - S + F = 2 - 2g}$.

Questo spiega il perché il poliedro rosso ha caratteristica di Eulero 0 e quello giallo ha caratteristica di Eulero -2: il poliedro rosso ha un buco, quindi $V - S + F = 2 - 2 \cdot 1 = 0$; il poliedro giallo invece ha due buchi, quindi $V - S + F = 2 - 2 \cdot 2 = -2$.

Ora è chiaro il motivo per cui a inizio paragrafo abbiamo scritto "la caratteristica di Eulero: un numero per distinguere le superfici". Dal valore della caratteristica di Eulero infatti riusciamo a capire con che tipo di superficie stiamo lavorando.

- Se la **caratteristica di Eulero** vale **2** significa che stiamo lavorando con una ***superficie priva di buchi***, cioè con una superficie topologicamente equivalente ad una sfera.
- Se la **caratteristica di Eulero** vale **0** significa che stiamo lavorando con una ***superficie con un buco***, cioè con una superficie topologicamente equivalente ad un toro.
- In generale se la **caratteristica di Eulero** vale $\boldsymbol{2 - 2g}$ significa che stiamo lavorando con una ***superficie con g buchi***.

Ricapitolando …

- Tutti i ***grafi planari connessi*** hanno **caratteristica di Eulero 2**.
- Il ***grafo*** relativo al problema ***delle tre case*** è un grafo su un toro i cui spigoli non si intersecano al di fuori dei vertici. La sua **caratteristica di Eulero** è **0**.

- Tutti i ***poliedri semplici*** (cioè senza buchi e quindi topologicamente equivalenti ad una sfera) ***e con facce semplicemente connesse*** (cioè con facce senza buchi) hanno **caratteristica di Eulero 2**, la stessa dei grafi planari connessi.
  È un caso che la caratteristica di Eulero sia la stessa dei grafi planari connessi? Non è un caso! Consideriamo un poliedro semplice e con facce semplicemente connesse. Se togliamo una sua faccia e lo schiacciamo sul piano otteniamo un grafo planare connesso, in cui V, S e F sono immutati (in particolare alla regione esterna del grafo corrisponde la faccia del poliedro che abbiamo tolto, mentre le regioni interne corrispondono ognuna ad una delle rimanenti facce).
- I poliedri e in generale le ***superfici con un buco*** (cioè topologicamente equivalenti ad un toro) hanno **caratteristica di Eulero 0**, come il grafo relativo al problema delle tre case.
- I poliedri e in generale le ***superfici con*** g ***buchi*** hanno **caratteristica di Eulero** $\mathbf{2-2g}$.

Notiamo che poliedri e grafi assumono gli stessi valori per quanto riguarda la caratteristica di Eulero. Perché questa analogia? Perché ad ogni poliedro è possibile associare un grafo: un grafo sul piano se il poliedro è privo di buchi, sul toro se ha un buco e in generale su una superficie con g buchi se il poliedro presenta g buchi.
Attenzione! Non vale però il viceversa, cioè non è vero che ad ogni grafo corrisponde un poliedro.