

Equazioni differenziali lineari.

- (1) Trovare la soluzione del problema di Cauchy:

$$\begin{cases} y' + 4x \cdot y = e^{-2x^2} \cdot \sin(x) \\ y(1) = 0 \end{cases}$$

- (2) Trovare tutte le soluzioni di

$$y' + \frac{1}{x} \cdot y = x \cdot e^x \quad (x > 0)$$

- (3) Trovare la soluzione del problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = \arctg x \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

Equazioni a variabili separabili. Risolvere i problemi di Cauchy e trovare il dominio delle soluzioni.

$$(4) \begin{cases} y' = \frac{\cos(x)}{3y^2} \\ y(0) = 2 \end{cases}$$

$$(5) \begin{cases} y' = -\frac{x}{y} \\ y(0) = -1 \end{cases}$$

Svolgimento.

(1) Posto $\alpha(x) = 4x$, calcolo $A(x) = \int_1^x \alpha(t) dt = \int_1^x 4t dt$
 $= 2t^2 \Big|_1^x = 2(x^2 - 1)$. Quindi

$$y' \cdot e^{2x^2-2} + 4x \cdot e^{2x^2-2} \stackrel{\text{EQUAZIONE}}{=} e^{-2x^2} \cdot \sin x \cdot e^{2x^2-2}$$
$$\parallel$$
$$\parallel$$
$$(y \cdot e^{2x^2-2})' \quad e^{-2} \cdot \sin x$$

$$\Rightarrow y(x) \cdot e^{2x^2-2} - y(1) \cdot e^{2 \cdot 1 - 2} = \int_1^x e^{-2} \cdot \sin t dt$$
$$\parallel \quad \parallel$$
$$y(x) \cdot e^{2x^2-2} - 0 = -e^{-2} \cdot \cos(t) \Big|_1^x$$
$$\parallel \quad \parallel$$
$$y(x) \cdot e^{2x^2} \cdot e^{-2} = -e^{-2} \cdot [\cos(x) - \cos(1)]$$

ho: $y(x) = e^{-2x^2} \cdot [\cos(x) - \cos(1)]; y: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

(2) Posto $\alpha(x) = \frac{1}{x}$, $\alpha:]0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$, si e

$A(x) = \int \alpha(x) dx$ una qualsiasi primitiva di α ,

p. es. $A(x) = \log x$. Quindi $e^{A(x)} = e^{\log x} = x$ e

$$(xy)' = x \cdot y' + y = x \cdot (y' + \frac{1}{x} y) \stackrel{\text{EQUAZIONE}}{=} x^2 \cdot e^x$$

$$\Downarrow$$
$$xy' + y = \int x^2 e^x dx = x^2 e^x - \int 2x e^x dx = x^2 e^x - [2x e^x - \int 2e^x]$$
$$\Downarrow$$
$$x^2 e^x - 2x e^x + 2e^x$$

$$y(x) = \frac{1}{x} [C + e^x (x^2 - 2x + 2)], C \in \mathbb{R}; y \in C^1([0, +\infty[, \mathbb{R})$$

(3)

$$y(x) - y(0) = \int_0^x y'(t) dt = \int_0^x \arctan t dt$$

$\parallel$ EQVANT. $\parallel$

$$y(x) - 1$$

3

$$(t \cdot \arctan t)' = \int_0^x \frac{t}{1+t^2} dt$$

$\parallel$

$$x \cdot \arctan x - \left(\frac{1}{2} \log(t^2+1) \right)'$$

$\parallel$

$$x \cdot \arctan x - \frac{1}{2} \log(x^2+1)$$

$$y(x) = 1 + x \cdot \arctan(x) - \frac{1}{2} \cdot \log(x^2+1)$$

$$y: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

(4)

$$3y^2 y' = \cos(x) \Leftrightarrow 3y^2 dy = \cos(x) \cdot dx$$

$$\Leftrightarrow \int_{y(0)}^{y(x)} 3y^2 dy = \int_0^x \cos(t) dt = \sin(t) \Big|_0^x = \sin x$$

$$\Downarrow y^3 \Big|_{y(0)}^{y(x)} = y(x)^3 - y(0)^3 = y(x)^3 - 8$$

$$\Rightarrow y(x)^3 = \sin(x) + 8$$

$$y(x) = \sqrt[3]{\sin(x) + 8}$$

$$y \in C^1(\mathbb{R})$$

(5)

$$y' = -\frac{x}{y} \Leftrightarrow y' y = -x \Leftrightarrow y dy = -x dx$$

$$\Leftrightarrow \int_{y(0)}^{y(x)} y dy = \int_0^x -t dt = -\frac{t^2}{2} \Big|_0^x = -\frac{x^2}{2}$$

$$\Downarrow \frac{y^2}{2} \Big|_{y(0)}^{y(x)} = \frac{y(x)^2 - y(0)^2}{2} = \frac{y(x)^2 - 1}{2}$$

$$\Leftrightarrow y(x)^2 = 1 - x^2. \text{ Puisque, } y(x) = \pm \sqrt{1-x^2}$$

Puisque $-1 = y(0) = \pm \sqrt{1}$, sachant $\ominus$:

$$y(x) = -\sqrt{1-x^2}; \quad y \in C^1([-1, 1])$$

Puisque $1-x^2 > 0 \Leftrightarrow |x| < 1$