PROVA SCRITTA DI ANALISI MATEMATICA L-B
CdL Ingegneria Informatica (A-F) e dell'Automazione

I appello, 24 marzo 2003 - 101

(1) [3 punti] Scrivere lo sviluppo di Taylor al secondo ordine nel punto di coordinate $(1,1)$ della funzione $u : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$.

$$u(x,y) = xy(x^2 + y^2 - 1)$$

(2) [4 punti] Trovare i punti critici di u e classificarli, dove

$$u(x,y) = u(x,y) = xy(x^2 + y^2 - 1)$$

è definita su tutto $\mathbb{R}^2$.

(3) [4 punti] Siano $f \in C^1(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$, $g \in C^1(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$ e $h \in C^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. Sia $k : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ la funzione definita da

$$k(x,y,z) = f(g(x,y), h(z) + x)$$

Scrivere $\nabla k(x,y,z)$. [Vi conviene usare nuove lettere per le variabili da cui dipende f. Ricordate che la derivata di h si scrive h'.]

(4) Sia a un numero reale e sia F il campo vettoriale definito su tutto $\mathbb{R}^2$,

$$F(x,y) = (2\cos(x) + ay, -3\sin(y) + x)$$

(a) [1 punto] per quale dei seguenti valori di a il campo f è chiuso? Per quel/quei valori di a, F è conservativo?
(i) $a = -1$, (ii) $a = 1$, (iii) $a = 2$, (iv) $a = -2$

(b) [3 punti] Per i valori di a per cui F è conservativo, calcolarne un potenziale.

(5) [4 punti] Sia $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \ x^2 + y^2 \leq 4, \ y \geq 0\} \cup \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 16, \ y \leq 0\}$. Calcolare il valore di

$$\int_D (x^2 + y^2 + \sqrt{2}x + y)dxdy$$

(i) $-68\pi + 112/3$; (ii) $68\pi - 112/3$; (iii) 0; (iv) $68\pi + 112/3$;

(6) (a) [2 punti] Trovare l'integrale generale dell'equazione differenziale

$$(*) \ 9y'' - 9y' + 2y = e^{2/3 \cdot x}$$

(b) [2 punti] Scrivere la soluzione del problema di Cauchy per $(*)$ con dati iniziali $y(0) = 0$, $y'(0) = 1/3$.

(7) [3 punti] Per quali valori del parametro reale $x \geq 0$ converge la seguente serie?

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2x)^n \log(n)}{n^2}$$

(i) $0 \leq x < 1/2$; (ii) $0 \leq x \leq 1/2$; (iii) $0 \leq x < 1$; (iv) $0 \leq x \leq 1$

(8) (*Facoltativo.*) [6 punti] Sia $f(x,y) = x + y$, $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$. Determinare $f(D)$, dove

$$D = \{(x,y) : \ y \leq x^2 + 1, \ y \leq x + 3, \ y \geq 0, \ x \leq 3\}$$

Soluzioni. (1) $u(1+h, 1+k) = 1 + 3h + 3k + 1/2(6h^2 + 10hk + 6k^2) + o_{(h,k)\to 0}(h^2 + k^2)$.

(2) Punti di sella: $(0,0)$, $(0,1)$, $(1,0)$, $(0,-1)$, $(-1,0)$. Punti di massimo locale: $(1/2,-1/2)$, $(-1/2,1/2)$. Punti di minimo locale: $(1/2,1/2)$, $(-1/2,-1/2)$.

(3) $f = f(u,v)$. $\nabla k(x,y,z) = (\partial_u f(g(x,y), h(x)+x)\partial_x g(x,y) + \partial_v f(g(x,y), h(x)+x), \partial_u f(g(x,y), h(x)+x)\partial_y g(x,y), \partial_v f(g(x,y), h(x)+x)h'(z))$.

(4) $a = 1$, $W = xy + 2\sin(x) + 3\cos(y) + k$.

(5) $68\pi - 112/3$

(6) Integrale generale: $y(x) = C_1 e^{x/3} + C_2 e^{2/3 \cdot x} + 1/3 \cdot x e^{2/3 \cdot x}$. Problema di Cauchy: $C_1 = C_2 = 0$.

(7) $0 \leq x \leq 1/2$.