

PROVA SCRITTA DI ANALISI MATEMATICA
L-B
CdL Ingegneria Informatica (A-F) e
dell'Automazione

I appello, 24 marzo 2003 - 102

(1) [3 punti] Scrivere lo sviluppo di Taylor al secondo ordine nel punto di coordinate $(1, 1)$ della funzione $u : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$.

$$u(x, y) = xy(4x^2 + y^2 - 1)$$

(2) [4 punti] Trovare i punti critici di u e classificarli, dove

$$u(x, y) = xy(4x^2 + y^2 - 1)$$

è definita su tutto \mathbb{R}^2 .

(3) [4 punti] Siano $f \in C^1(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$, $g \in C^1(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$ e $h \in C^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. Sia $k : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ la funzione definita da

$$k(x, y, z) = f(h(y) + x, g(x, z))$$

Scrivere $\nabla k(x, y, z)$. [Vi conviene usare nuove lettere per le variabili da cui dipende f . Ricordate che la derivata di h si scrive h' .]

(4) Sia a un numero reale e sia F il campo vettoriale definito su tutto \mathbb{R}^2 ,

$$F(x, y) = (\cos(x) + 2ay, -\sin(y) - 4x)$$

(a) [1 punto] per quale dei seguenti valori di a il campo f è chiuso? Per quel/quelli valori di a , F è conservativo?

(i) $a = 2$, (ii) $a = -2$, (iii) $a = -1$, (iv) $a = 1$,

(b) [3 punti] Per i valori di a per cui F è conservativo, calcolarne un potenziale.

(5) [4 punti] Sia $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1, y \geq 0\} \cup \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 4, y \leq 0\}$. Calcolare

$$\int_D (x^2 + y^2 - x + y) dx dy$$

(i) 0; (ii) $17/4\pi + 14/3$; (iii) $-17/4\pi + 14/3$; (iv) $17/4\pi - 14/3$;

(6) (a) [2 punti] Trovare l'integrale generale dell'equazione differenziale

$$(*) y'' - 3y' + 2y = e^{2x}$$

(b) [2 punti] Scrivere la soluzione del problema di Cauchy per (*) con dati iniziali $y(0) = 0, y'(0) = 1$.

(7) [3 punti] Per quali valori del parametro reale $x \geq 0$ converge la seguente serie?

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(3x)^n \log(n)}{n^2}$$

(i) $0 \leq x < 1/3$; (ii) $0 \leq x < 1$; (iii) $0 \leq x \leq 1/3$; (iv) $0 \leq x \leq 1$

(8) (*Facoltativo.*) Sia $f(x, y) = x + y, f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$. Determinare $f(D)$, dove

$$D = \{(x, y) : y \leq x^2 + 4, y \leq 2x + 12, y \geq 0, x \leq 6\}$$

Svolgere l'esercizio in un foglio a parte.

Soluzioni. (1) $u(1+h, 1+k) = 4 + 12h + 6k + 1/2(24h^2 + 28hk + 6k^2) + o_{(h,k) \rightarrow 0}(h^2 + k^2)$.

(2) Punti di sella: $(0, 0), (0, 1), (1/2, 0), (0, -1), (-1/2, 0)$. Punti di massimo locale: $(1/4, -1/2), (-1/4, 1/2)$. Punti di minimo locale: $(1/4, 1/2), (-1/4, -1/2)$.

(3) $f = f(u, v)$. $\nabla k(x, y, z) = (\partial_u f(h(y) + x, g(x, z)) + \partial_v f(h(y) + x, g(x, z)) \partial_x g(x, z), \partial_u f(h(y) + x, g(x, z)) h'(y), \partial_v f(h(y) + x, g(x, z)) \partial_z g(x, z))$.

(4) $a = -2, W = -4xy + \sin(x) + \cos(y) + k$.

(5) $17/4 \cdot \pi - 14/3$

(6) Integrale generale: $y(x) = C_1 e^x + C_2 e^{2x} + x e^x$. Problema di Cauchy: $C_1 = C_2 = 0$.

(7) $0 \leq x \leq 1/3$.