

PROVA SCRITTA DI ANALISI MATEMATICA
L-B
CdL Ingegneria Informatica (A-F) e
dell'Automazione

II appello, 8 aprile 2003 - 201

Nome e cognome (in stampatello).....

Corso di Laurea.....

Avvertenze. Non si possono usare quaderni di appunti e libri, ma solo due fogli formato protocollo con le formule e le note che lo studente riterrà utili. Non si possono utilizzare calcolatrici grafiche. Sarà allontanato dall'aula lo studente che porta con sé un telefonino, un palmare, o qualsiasi altro strumento utile a comunicare. Non può sostenere l'esame lo studente che sia privo sia del libretto universitario, che di un documento d'identità con fotografia.

É fortemente sconsigliato dal sostenere la prova orale chi non riporti almeno 8 punti nella prova scritta. Correggerò l'esercizio facoltativo solo a chi abbia ottenuto almeno 8 punti nella parte obbligatoria.

(1) [3 punti] Scrivere lo sviluppo di Taylor al secondo ordine nel punto di coordinate $(0, 1)$ della funzione $u : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$,

$$u(x, y) = xe^{-x^2-y^2}$$

(2) [4 punti] Trovare i punti critici di u e classificarli, dove

$$u(x, y) = xe^{-x^2-y^2}$$

è definita su tutto \mathbb{R}^2 .

(3) [4 punti] Sia $f \in C^1(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$. Sia $h : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ la funzione definita da

$$h(x, y, z) = yf(xyz, x + z)$$

Scrivere il gradiente di h . [Vi conviene usare nuove lettere per le variabili da cui dipende f]

(4) [4 punti] Sia $D = \{(x, y) : x^2 + y^2 \leq 1, 0 \leq y \leq x\}$ e sia $f(x, y) = xy$. Calcolare il valore dell'integrale di prima specie

$$\int_{\partial D} f(x, y) ds$$

(i) 0, (ii) $\pi/2$, (iii) $1/3$, (iv) $-1/2$, (v) $\sqrt{2} + 1/2$

(5) [4 punti] Sia $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \geq 1/2, y \geq 1/2, xy \leq 1\}$. Calcolare il valore di

$$\int_D \frac{1}{y} dx dy$$

(i) $\frac{1}{2} - \frac{3}{2} \log 2$; (ii) $\frac{3}{2} - \log 2$; (iii) $\frac{3}{2} - \frac{3}{2} \log 2$; (iv) $\frac{3}{2} - \frac{5}{2} \log 2$; (v) $\frac{5}{2} - \frac{5}{2} \log 2$;

(6) (a) [2 punti] Trovare l'integrale generale dell'equazione differenziale

$$(*) y'' + y = e^x \sin(x)$$

(b) [2 punti] Scrivere la soluzione del problema di Cauchy per (*) con dati iniziali $y(0) = 0, y'(0) = 0$.

(7) [3 punti] Per quali valori del parametro reale $x \geq 0$ converge la seguente serie?

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{x^n + (2x)^n + n^x}$$

(i) $x > 1$; (ii) $x \geq 1$; (iii) $x > 1/2$; (iv) $x \geq 1/2$; (v) $x > 0$.

(8) (*Facoltativo.*) [6 punti] Calcolare il lavoro

$$\int_{\partial D} \frac{-y}{x^2 + y^2} dx + \frac{x}{x^2 + y^2} dy$$

dove

$$D = \{(x, y, z) : (x - 4)^2 + y^2 \leq 1\}$$