PROVA SCRITTA DI ANALISI MATEMATICA L-B
CdL Ingegneria Informatica (A-F) e dell'Automazione

I appello, 2 luglio 2003 - 301

(1) [3 punti] Scrivere lo sviluppo di Taylor al secondo ordine nel punto di coordinate $(0,1)$ della funzione $u : \{(x,y) : \ (1+x)^2 + y > 0\} \to \mathbb{R}$.

$$u(x,y) = \log \frac{(1+x)^2 + y}{1+y^2}$$

(2) [4 punti] Trovare i punti critici di u e classificarli, dove

$$u(x,y) = \log \frac{(1+x)^2 + y}{1+y^2}$$

è definita su $\{(x,y) : \ (1+x)^2 + y > 0\}$.

(3) [4 punti] Siano $f \in C^1(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$, $g \in C^1(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$. Sia $k : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ la funzione definita da

$$k(x,y,z) = (yzf(x,x), g(y,z))$$

Scrivere $\nabla k(x,y,z)$. [Vi conviene usare nuove lettere per le variabili da cui dipende f]

(4) Sia a un numero reale e sia F il campo vettoriale definito su tutto $\mathbb{R}^2$,

$$F(x,y) = \left(3x^2 - 8xy, -2ax^2 + 2y\right)$$

(a) [1 punto] per quale dei seguenti valori di a il campo f è chiuso? Per quel/quei valori di a, F è conservativo?
(i) $a = -1$, (ii) $a = 1$, (iii) $a = 2$, (iv) $a = -2$

(b) [3 punti] Per i valori di a per cui F è conservativo, calcolarne un potenziale.

(5) [4 punti] Sia $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 :\ x^2 + y^2 \leq 1,\ y \geq 0\} \cup \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : |x| \leq 1,\ -1 \leq y \leq 0\}$. Calcolare il valore di

$$\int_D (x + x^2 y) dxdy$$

(i) 0; (ii) $\pi + 1$; (iii) $1 - \pi$; (iv) $-1/5$;

(6) (a) [2 punti] Trovare l'integrale generale dell'equazione differenziale

$$(*)\ y'' - 6y' + 9y = e^x$$

(b) [2 punti] Scrivere la soluzione del problema di Cauchy per $(*)$ con dati iniziali $y(0) = 0$, $y'(0) = 0$.

(7) [3 punti] Per quali valori del parametro reale $x \geq 0$ converge la seguente serie?

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{2n}}{2^n}$$

(i) $0 \leq x < \sqrt{2}$; (ii) $-\sqrt{2} \leq x \leq \sqrt{2}$; (iii) $-\sqrt{2} < x < \sqrt{2}$; (iv) $0 \leq x \leq \sqrt{2}$

(8) (*Facoltativo.*) [6 punti] Sia $f(x,y) = x^2 y$, $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$. Determinare $f(D)$, dove

$$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 :\ x^2 + y^2 \leq 1,\ y \geq 0\} \cup \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 :\ |x| \leq 1,\ -1 \leq y \leq 0\}$$