PROVA SCRITTA TIPO
CdL Ingegneria Informatica (A-F) e dell'Automazione

19 marzo 2003

(1) Scrivere lo sviluppo di Taylor al secondo ordine nel punto di coordinate $(1,1)$ della funzione $u : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$.

$$u(x, y) = xy(x^3 + y^3 - 1)$$

(2) Trovare i punti critici di u e classificarli, dove

$$u(x, y) = u(x, y) = xy(x^3 + y^3 - 1)$$

è definita su tutto $\mathbb{R}^2$.

(3) Siano $f \in C^1(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$, $g \in C^1(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$ e $h \in C^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. Sia $k : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ la funzione definita da

$$k(x, y, z) = f(g(x, y), h(z) + x)$$

Scrivere $\nabla k(x, y, z)$. [Vi conviene usare nuove lettere per le variabili da cui dipende f. Ricordate che la derivata di h si scrive h'.]

(4) Sia a un numero reale e sia F il campo vettoriale definito su tutto $\mathbb{R}^2 - \{(0,0)\}$,

$$F(x, y) = \left(axe^{x^2+y^2}, 2ye^{x^2+y^2} + 1\right)$$

(a) per quale dei seguenti valori di a il campo f è chiuso? Per quel/quei valori di a, F è conservativo?
(i) $a = 0$, (ii) $a = 2$, (iii) per ogni valore di a, (iv) $a = -2$

(b) Per i valori di a per cui F è conservativo, calcolarne un potenziale.

(5) Sia $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \ x^2 + y^2 \leq 1\} \cup \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \ 1 \leq x^2 + y^2 \leq 2, \ x \geq 0, \ y \geq 0\}$. Calcolare

$$\int_D (x^3y + xy^3)dxdy$$

(6) (a) Trovare l'integrale generale dell'equazione differenziale

$$(*) \ y'' + 6y' + 9y = 6 + 9x$$

(b) Scrivere la soluzione del problema di Cauchy per $(*)$ con dati iniziali $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$.

(7) Per quali valori del parametro reale x converge la seguente serie?

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^x}{n^n}$$

(8) (*Facoltativo.*) Sia $f(x, y) = x^2 - y^2$, $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$. Determinare $f(D)$, dove

$$D = \{(x, y) : \; x^2 + y^2 \leq 1, \; 0 \leq x \leq y\}$$

[Fate attenzione a che i punti che trovate con i vostri calcoli stiano in D!!!].

Soluzioni. (1) $u(1 + h, 1 + k) = 1 + 4h + 4k + 1/2(12h^2 + 7hk + 12k^2) + o(h^2 + k^2)$.

(2) $(0, 0)$; $(0, 1)$; $(1, 0)$; $(1/5^{1/3}, 1/5^{1/3})$: tutti punti di sella.

(3) Scrivo $f = f(u, v)$. Allora,

$$\nabla k(x, y, z) = (\partial_u f(g(x, y), h(z) + x)\partial_x g(x, y) + \partial_v f(g(x, y), h(z) + x),$$

$$\partial_u f(g(x, y), h(z) + x)\partial_y g(x, y), \partial_v f(g(x, y), h(z) + x)h'(z))$$

(4) $a = 2$. Un potenziale è dato da $W(x, y) = e^{x^2+y^2} + y$.

(5) Si fa in coordinate polari. Il valore dell'integrale $\frac{7}{12}$.

(6) Integrale generale. $y(x) = C_1 e^{-3x} + C_2 x e^{-3x} + x$. Soluzione dell'integrale di Cauchy: $y(x) = x$.

(7) Conviene usare il criterio del rapporto. La serie converge (assolutamente) se e solo se $x \leq 1$.