Mappe conformi

Nicola Arcozzi

2010

Una *mappa conforme* $f : \Omega \to \mathbb{C}$ è una funzione olomorfa iniettiva definita in un aperto Ω nel piano complesso $\mathbb{C}$. Alternativamente, f è conforme se è un (i) diffeomorfismo del piano in sè che (ii) conserva gli angoli tra curve. Ovvero, f è conforme se la mappa $u \mapsto u \circ f$ manda funzioni armoniche in funzioni armoniche. Equivalentemente, f è conforme se il *pullback* della metrica euclidea mediante f è conforme alla stessa metrica euclidea: $f_z^*(ds^2) = \lambda(z)ds^2$, con $\lambda = \lambda(z) > 0$. O anche, f è conforme se conserva il moto browniano.

La teoria delle funzioni conformi è tra le più antiche sottobranche dell'analisi matematica ed è a tutt'oggi oggetto di intensa ricerca. Un suo risultato-chiave è il Teorema della Mappa di Riemann (1851): due domini semplicementi connessi propriamente contenuti nel piano possono essere mappati uno nell'altro da una mappa conforme. Ciò non vale nel caso di domini aventi la topologia di un anello; né nel caso semplicemente connesso, ma in dimensione superiore. Questi risultati danno un'idea di come le mappe conformi esibiscano un certo grado di plasticità, pur avendo la rigidità che ci si aspetta da delle funzioni olomorfe.

L'analisi armonica, parte della teoria del potenziale, la geometria delle superfici, la moderna teoria delle mappe quasi-conformi e persino la teoria delle stringhe hanno legami profondi e imprescindibili con l'analisi complessa in generale e con la teoria delle mappe conformi in particolare. La teoria ha importanti applicazioni nelle scienze, applicate e non, e ovviamente all'interno della stessa matematica: dinamica dei fluidi piani, aereodinamica, equazioni differenziali...

Soprattutto, si tratta della branca più geometrica dell'analisi matematica, forse anche della più elegante.

Il corso ha lo scopo di presentare gli aspetti di base della teoria, valorizzando quando possibile i legami con altre parti della matematica e non solo; e anche di rendere famigliari i partecipanti con alcuni aspetti tecnici della materia, diciamo così, "sporcandocisi le mani". Il corso si basa su lezioni ed esercizi svolti. Lo svolgimento degli esercizi verrà presentato dagli stessi partecipanti. Alla fine del corso, i partecipanti sono invitati a presentare alcuni esercizi da una lista e un seminario, su un argomento da concordare. Il seminario può anche essere svolto durante il corso, se l'argomento si presta.

Il programma indicativo della prima parte del corso è il seguente (non necessariamente nello stesso ordine).

- Funzioni olomorfe e geometria iperbolica del disco.
- Teorema della Mappa di Riemann.
- Continuità al bordo (teorema di Carathéodory).
- Principio di riflessione e formula di Schwarz-Christoffel (mappe conformi su poligoni).
- Teorema di Köbe e distorsione.
- Oggetti invarianti per mappe conformi: integrali di Dirichlet, funzioni di Green, misura armonica...

Nel tempo che rimane, magari anche in forma più seminariale, si potrebbe affrontare uno o più dei seguenti argomenti, più specialistici.

- Moto browniano e mappe conformi.
- Teoria del potenziale.
- Aspetti combinatori: impaccamento di sfere (W. Thurston).
- Equazione di Beltrami e mappe quasi-conformi.
- Problemi estremali.
- Uniformazione di superfici e spazi di Teichmüller.
- Aspetti numerici.
- Misura armonica.
- Eccetera...