Prova Scritta di Analisi Matematica LS
Ingegneria Civile

Nicola Arcozzi

9 febbraio 2010

Il tempo a disposizione é di 2 ore e 30 minuti. Non si possono utilizzare libri o appunti, eccetto un foglio protocollo formato A4 con formule che si ritengono utili. Si è ammessi alla prova orale con un punteggio di almeno 12 punti nella parte non facoltativa.

Nella soluzione degli esercizi riportate i calcoli e le motivazioni.

Esercizio 1.[5 pt.] Risolvere il seguente problema di Dirichlet nel disco $B = B(0,1) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \ x^2 + y^2 < 1\}$.

$$\begin{cases} \Delta u = 0 \ in \ B, \\ u(x,y) = (x+y)^4 \ su \ \partial B. \end{cases}$$

Esercizio 2.[8 pt.] Calcolare $\hat{f}$, dove la funzione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ è definita da

$$f(x) = e^{-\epsilon |x|},$$

con $\epsilon > 0$ fissato.

Esercizio 3.[4 pt.] Trovare l'integrale generale dell'equazione differenziale lineare ordinaria del II ordine:

$$x'' - 2x' + x = e^{-t^2}.$$

Esercizio 4.[7 pt.] Sia $g : [0, \pi] \to \mathbb{R}$ la funzione

$$g(x) = 1 \ \forall x \in [0, \pi]$$

Trovare coefficienti c_n (n intero, $n \geq 1$) tali che l'uguaglianza

$$g(x) = \sum_{n \geq 1} c_n \sin(nx)$$

valga su $[0, \pi]$ nel senso L^2. [Motivare i passaggi].

Risolvere quindi il seguente problema misto:

$$\begin{cases} u_{tt} - 9u_{xx} = 0, \\ u(0,t) = u(\pi, t) = 0 \ \forall t > 0, \\ u(x, 0) = 0 \ \forall x \in [0, \pi], \\ u_t(x, 0) = 1 \ \forall x \in [0, \pi], \end{cases}$$

Esercizio 5.[6 pt.] Trovare la soluzione del seguente problema di Cauchy:

$$\begin{cases} u_t(x,t) + \frac{e^{-x}}{1+t^2} u_x(x,t) = 0 \\ u(x, 0) = e^x. \end{cases}$$

Prova Scritta di Analisi Matematica LS
Ingegneria Civile

Nicola Arcozzi

9 febbraio 2010

Il tempo a disposizione é di 3 ore. Non si possono utilizzare libri o appunti, eccetto un foglio protocollo formato A4 con formule che si ritengono utili. Si è ammessi alla prova orale con un punteggio di almeno 15/30 punti.

(1) Trovare la soluzione del problema al bordo non omogeneo:

$$\begin{cases} u_y(x,y) - u_{xx}(x,y) = \sin(3y) \text{ per } x \in [0,\pi],\ y \geq 0, \\ u(x,0) = 0 \text{ per } x \in [0,\pi];\ u(0,y) = u(\pi,y) = 0 \text{ per } y \geq 0. \end{cases}$$

(2) Trovare la soluzione del seguente problema di Cauchy:

$$\begin{cases} u_t(x,t) + \frac{e^{-x}}{1+t^2} u_x(x,t) = 0 \\ u(x,0) = e^x. \end{cases}$$

(3) Trovare la soluzione del problema al bordo omogeneo:

$$\begin{cases} u_y(x,y) - u_{xx}(x,y) = 0 \text{ per } x \in [0,\pi],\ y \geq 0, \\ u(x,0) = \pi x - x^2 \text{ per } x \in [0,\pi];\ u(0,y) = u(\pi,y) = 0 \text{ per } y \geq 0. \end{cases}$$

(2)
$$\begin{cases} v_t(x,t) + \dfrac{e^{-x}}{1+t^2} v_x(x,t) = 0 \\ v(x,0) = e^x \end{cases}$$

Posto $x = x(t)$, ho:

$$\frac{d}{dt} v(x(t),t) = v_x(x(t),t) \cdot \dot{x}(t) + v_t(x(t),t).$$

Se quindi $\dot{x}(t) = \dfrac{e^{-x(t)}}{1+t^2}$ e $x(0) = x_0$ ho

$$\begin{cases} \dfrac{d}{dt} v(x(t),t) = 0 \\ v(x(0),0) = e^{x_0} \end{cases} \quad \text{cioè} \quad \begin{cases} v(x(t),t) = \\ = v(x(0),0) + \displaystyle\int_0^t \frac{d\, v(x(s),s)}{ds} ds \\ = e^{x_0} + \displaystyle\int_0^t 0 \cdot ds = e^{x_0} \end{cases}$$

Risolvo
$$\begin{cases} \dot{x} = \dfrac{e^{-x}}{1+t^2} \\ x(0) = x_0 \end{cases} \quad \begin{cases} e^x \cdot dx = \dfrac{dt}{1+t^2} \\ x(0) = x_0 \end{cases} \quad \text{cioè},$$

$$\int_{x(0)}^{x(t)} e^{+y} dy = \int_0^t \frac{ds}{1+s^2} = \operatorname{arctg}(s)\Big|_0^t = \operatorname{arctg}(t)$$

$$\left(+e^{+y}\right)_{x(0)}^{x(t)} = e^{x(t)} - e^{x(0)}$$

$$e^{x(t)} = e^{x(0)} + \operatorname{arctg}(t) \iff x(t) = \log\left(e^{x(0)} + \operatorname{arctg}(t)\right).$$

Ricordo che $v(x(t),t) = e^{x_0}$; ho $e^{x_0} = e^{x(t)} - \operatorname{arctg}(t)$:

$$v(x(t),t) = e^{x(t)} - \operatorname{arctg}(t).$$

cioè $\boxed{v(x,t) = e^x - \operatorname{arctg}(t).}$

Verifico: $v(x,0) = e^x - \operatorname{arctg}(0) = e^x$

$v_x(x,t) = e^x$; $v_t(x,0) = -\dfrac{1}{1+t^2}$;

$$v_t + \frac{e^{-x}}{1+t^2} v_x = -\frac{1}{1+t^2} + \frac{e^{-x}}{1+t^2} \cdot e^x = 0$$

O.K.

③ $\begin{cases} u_y - u_{xx} = 0 & \text{se } 0 \le x \le \pi;\ y \ge 0 \\ u(x,0) = \pi x - x^2 & \text{se } 0 \le x \le \pi;\ u(0,y) = u(\pi,y) = 0 \\ & \text{se } y \ge 0 \end{cases}$

Cerco $u(x,y) = \sum_{n \ge 1} c_n(y) \cdot \sin(nx)$

$$u_y(x,y) = \sum_{n \ge 1} c_n'(y) \cdot \sin(nx)$$

$$u_{xx}(x,y) = \sum_{n \ge 1} \left(-c_n(y)\right) \cdot n^2 \cdot \sin(nx)$$

$$u(0,y) = u(\pi,y) = 0 \quad \forall y \in \mathbb{R}$$

$$u_y(x,y) - u_{xx}(x,y) = \sum_{n \ge 1} \left[c_n'(y) + n^2 \cdot c_n(y)\right] \cdot \sin(nx)$$

Quindi voglio $\forall n \ge 1$: $c_n'(y) + n^2 \cdot c_n(y) = 0$

$$c_n(y) = A_n \cdot e^{-n^2 y}$$

Inoltre $\pi x - x^2 = u(x,0) = \sum_{n \ge 1} c_n(0) \cdot \sin(nx)$.

$$= \sum_{n \ge 1} A_n \cdot \sin(nx):$$

A_n è l'n-esimo coeff. nello sviluppo di $\pi x - x^2$:

$$A_n = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi (\pi x - x^2) \cdot \sin(nx)\, dx =$$

$$\cancel{= \frac{2}{\pi}\left[-\frac{\cos(nx)}{n}\right]_0^\pi - \frac{2}{\pi}\int_0^\pi -\frac{\cos(nx)}{n} \cdot (\pi - 2x)\, dx}$$

$$\cancel{= \frac{2}{\pi} \cdot \frac{-\cos(n\pi)+1}{n} - \frac{2}{\pi} \cdot \left(-\frac{\sin(nx)}{n^2}\right) \Big|_0^\pi + \frac{4}{\pi n}}$$

$$= \frac{2}{\pi} \cdot \left[-\frac{\cos(nx)}{n} \cdot (\pi x - x^2)\right]_0^\pi - \frac{2}{\pi}\int_0^\pi -\frac{\cos(nx)}{n} \cdot (\pi - 2x)\, dx$$

$$= 0 + \frac{2}{\pi n} \cdot \left[(\pi - 2x) \cdot \frac{\sin(nx)}{n}\right]_0^\pi - \frac{2}{\pi n} \cdot \int_0^\pi (-2) \cdot \frac{\sin(nx)}{n}\, dx$$

$$= 0 + 0 + \frac{4}{\pi n^2} \cdot \left[-\frac{\cos(nx)}{n}\right]_0^\pi = \frac{4}{\pi n^3} \cdot \left[1 - \cos(n\pi)\right] =$$

$$= \frac{4}{\pi \cdot n^3} \cdot \left[1-(-1)^n\right] = \begin{cases} 0 & \text{se } n \text{ è pari} \\ 8/\pi n^3 & \text{se } n \text{ è dispari} \end{cases}$$

$$\boxed{v(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{\pi n^3} \cdot \left[1-(-1)^n\right] \cdot \sin(nx)\, e^{-n^2 y}}$$

$$= \frac{8}{\pi} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{(2m+1)^3} \cdot \sin((2m+1)x) \cdot e^{-(2m+1)^2 \cdot y}$$

(1) Pongo ancora $v(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n(y) \sin(nx)$:

$$\sin(3x) = \sum_{n=1}^{\infty} \left[c_n'(y) + n^2 c_n(y)\right] \cdot \sin(nx);$$

$$c_n'(y) + n^2 c_n(y) = 0 \qquad \text{se } n \neq 3$$

$$c_3'(y) + 9 \cdot c_3(y) = 1$$

$$0 = v(x,0) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n(0) \cdot \sin(nx) \Leftrightarrow c_n(0) = 0 \quad \forall n \geq 1.$$

Quindi $c_n(y) = 0 \quad \forall n \neq 3$

$$\begin{cases} c_3'(y) + 9 \cdot c_3(y) = 1 \\ c_3(0) = 0 \end{cases}$$

Risolvo $z' + 9z = 0$:
$z(y) = A \cdot e^{-9y}$

Provo con $c_3(y) = A$: $9A = 1$, $A = 1/9$.

L'integrale generale è $c_3(y) = 1/9 + A \cdot e^{-9y}$

e $0 = c_3(0) = 1/9 + A$: $A = -1/9$

$$c_3(y) = \frac{1}{9}\left(1 - e^{-9y}\right) e$$

$$\boxed{v(x,y) = \frac{1}{9} \cdot \left(1 - e^{-9y}\right) \cdot \sin(3x)}$$

(1) $x^2+y^2=1 \Rightarrow (x+y)^4 = \left((x+y)^2\right)^2 = (x^2+2xy+y^2)^2 = (1+2xy)^2$

$= 1+4xy+4x^2y^2$: $1+4xy$ è armonica.

Cerco $v(x,y)$: $\Delta v = 0$ in B e $v(x,y) = 4x^2y^2$ su ∂B.

In coordinate polari:

$$x^2y^2 = \cos^2\theta \cdot \sin^2\theta = \left(\frac{e^{i\theta}+e^{-i\theta}}{2}\right)^2 \cdot \left(\frac{e^{i\theta}-e^{-i\theta}}{2i}\right)^2$$

$$= \frac{\left(e^{2i\theta}-e^{-2i\theta}\right)^2}{2^2\cdot(2i)^2} = \frac{e^{4i\theta}-2+e^{4i\theta}}{-16}$$

$$= \frac{(x+iy)^4+(x-iy)^4-2}{-16} = \frac{x^4+4ix^3y-6x^2y^2-4ixy^3+y^4-2 \;..}{-16}$$

$$..\frac{+x^4-4ix^3y-6x^2y^2+4ixy^3+y^4}{} =$$

$$= \frac{2x^4-12x^2y^2+2y^4-2}{-16} = \frac{1}{8}-\frac{1}{8}\left(x^4-6x^2y^2+y^4\right)$$

che è armonica:

$$v(x,y) = 1+4xy+\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\left(x^4-6x^2y^2+y^4\right)$$

$$= \boxed{\frac{3}{2}+4xy-\frac{1}{2}\cdot\left(x^4-6x^2y^2+y^4\right) = v(x,y)}$$

Verifico: $\partial_{xx}(x^4-6x^2y^2+y^4)+\partial_{yy}(x^4-6x^2y^2+y^4) =$

$= 12x^2-12y^2-12x^2+12y^2 = 0$ o.k.

(2) $$\hat{f}(\xi) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\varepsilon|x|}\cdot e^{-i\xi x}\,dx =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\cdot\left(\frac{e^{-\varepsilon x-i\xi x}}{-\varepsilon-i\xi}\right)_0^{\infty} + \frac{1}{2\pi}\left(\frac{e^{\varepsilon x-i\xi x}}{\varepsilon-i\xi}\right)_{-\infty}^{0}$$

$$= \frac{1}{2\pi}\,\frac{1}{\varepsilon+i\xi}+\frac{1}{2\pi}\cdot\frac{1}{\varepsilon-i\xi} = \frac{1}{2\pi}\cdot\frac{2\varepsilon}{\varepsilon^2+\xi^2} = \frac{1}{\pi}\,\frac{\varepsilon}{\varepsilon^2+\xi^2}$$

(3) $z'' - 2z' + z = 0 \qquad \lambda^2 - 2\lambda + 1 = 0 \qquad \lambda = 1, 1$

$$z(t) = A e^t + Bt \cdot e^t$$

$$x(t) = A(t)\, e^t + B(t) \cdot t \cdot e^t$$

$$\dot{x}(t) = \dot{A} e^t + \dot{B}\, t e^t + A e^t + B\left(e^t + t e^t\right)$$

$$= A \cdot e^t + B \cdot \left(e^t + t e^t\right) \quad \text{se} \quad \boxed{\dot{A} e^t + \dot{B} t e^t = 0}$$

$$\ddot{x} = \dot{A} e^t + \dot{B}\left(e^t + t e^t\right) + A e^t + B\left(2e^t + t e^t\right)$$

$$= e^{-t^2} + A e^t + B\left(2e^t + t e^t\right)$$

$$\text{se} \quad \boxed{\dot{A} e^t + \dot{B}\left(e^t + t e^t\right) = e^{-t^2}}$$

Fatte queste ipotesi, $x(t)$ è soluzione dell'eq. diff.

$$\begin{cases} \dot{A} e^t + \dot{B}\, t e^t = 0 \\ \dot{A} e^t + \dot{B}\left(e^t + t e^t\right) = e^{-t^2} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dot{A} + t \cdot \dot{B} = 0 \\ \dot{A} + (1+t) \cdot \dot{B} = e^{-t^2-t} \end{cases} \qquad \dot{B} = e^{-t^2-t}, \quad \dot{A} = -t \cdot e^{-t^2-t}$$

$$A(t) = \alpha - \int_0^t s\, e^{-s^2-s}\, ds$$

$$B(t) = \beta + \int_0^t e^{-s^2-s}\, ds$$

$$\boxed{x(t) = \alpha e^t - e^t \cdot \int_0^t s \cdot e^{-s^2-s}\, ds + \beta\, t \cdot e^t + t \cdot e^t \cdot \int_0^t e^{-s^2-s}\, ds}$$

(4)

$$1 = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \cdot \sin(nx) \qquad 0 \le x \le \pi$$

$$c_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} \sin(nx)\,dx = \frac{2}{\pi}\left(-\frac{\cos(nx)}{n}\right)_0^{\pi} = \frac{2}{\pi n}\left[1-\cos(n\pi)\right]$$

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty}\left[A_n \cos(3nt) + B_n \sin(3nt)\right]\cdot \sin(nx)$$

$$0 = u(x,0) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cdot \sin(nx) \Rightarrow A_n = 0 \;\; \forall n \ge 1$$

$$1 = u_t(x,0) = \sum_{n=1}^{\infty} 3nB_n \cdot \sin(nx) \Rightarrow B_n = \frac{1}{3n}\cdot\frac{2}{\pi n}\cdot\left[1-\cos(n\pi)\right]$$

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{3\pi n^2}\cdot\left[1-\cos(n\pi)\right]\cdot \sin(3nt)\cdot\sin(nx)$$