

# SPAZI DI FUNZIONI OLOMORFE

Nicola Arcozzi

12 gennaio 2007

**Descrizione del corso.** Lo spazio di Hardy "classico"  $H^p$ ,  $p > 0$ , è definito come lo spazio delle funzioni  $f$  olomorfe nel disco complesso  $D = \{z : |z| < 1\} \subset \mathbb{C}$  tali che

$$\sup_{0 \leq r < 1} \left( \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(re^{i\theta})| d\theta \right)^{1/p} < \infty.$$

Il caso limite  $H^\infty$  è lo spazio delle funzioni olomorfe limitate in  $D$ . La teoria degli spazi  $H^p$  classici è stata estesa in molte direzioni differenti (spazio euclideo, più variabili complesse, processi stocastici, giusto per citare alcuni importanti esempi) e rimane a tutt'oggi un modello per molti sviluppi dell'analisi armonica (funzioni massimali, integrali singolari...) e non solo. Gli spazi  $H^p$  classici appaiono anche nella matematica applicata (teoria del controllo  $H^\infty$ , per esempio) e sono, in un senso preciso, "oggetti universali" per taluni aspetti dell'analisi funzionale e degli operatori.

L'obiettivo del corso è di ripercorrere alcuni aspetti fondamentali degli spazi  $H^p$  classici. Ci restringeremo al caso classico perchè (i) i risultati sono più completi, (ii) l'utilizzo dell'analisi complessa permette di accorciare alcune dimostrazioni, (iii) la dimensione bassa consente una miglior comprensione geometrica della teoria. Alla fine del corso, lo studente dovrebbe essere in grado di avviarsi allo studio delle estensioni della teoria ad altri contesti, alcune delle quali sono al momento attivi campi di ricerca.

La lista degli argomenti che segue è solo indicativa e verrà modificata (accorciata) in corso d'opera.

- Valori al bordo delle funzioni in  $H^p$ .
- Prodotti di Blaschke e zeri di funzioni in  $H^p$ .
- Misure di Carleson.
- Soluzione del problema  $\bar{\partial}$ .
- Successioni interpolanti.
- Dualità  $H^p$ - $BMO$ .
- Analisi dell'operatore "moltiplicazione per  $z$ ".
- Disuguaglianza di Von Neumann.
- Teoria del controllo  $H^\infty$ .

**Prerequisiti.** Un corso di base di analisi complessa. Un corso di analisi funzionale. Teoria della misura.

**Bibliografia.** Riferimenti classici sono *Theory of  $H^p$  spaces* di Peter Duren (per la teoria fino al 1970) e *Bounded analytic functions* di John Garnett (per la teoria fino al 1981). Via via indicherò articoli e testi d'interesse per il corso.

**Ciò che è richiesto agli studenti.** Assegnerò degli esercizi per casa. Alla fine del corso, ogni studente deve tenere un seminario su un argomento che sceglieremo insieme.

**Tempi.** Il corso dura 30 ore: 3 ore a settimana per dieci settimane. Le lezioni inizieranno ad aprile.