

Esercizi sulle equazioni differenziali

Nicola Arcozzi

2 febbraio 2007

(1) Trovare gli integrali generali delle equazioni differenziali lineari omogenee del II ordine:

$$(1.1) \quad y'' + y = 0.$$

$$(1.2) \quad y'' - 4y + 4y = 0.$$

$$(1.3) \quad y'' + y' = 0.$$

$$(1.4) \quad y'' = 0.$$

$$(1.5) \quad y'' + 3y' + 2y = 0.$$

(2) Trovare gli integrali generali delle equazioni differenziali lineari del II ordine:

$$(2.1) \quad y'' - y = 2x - 1.$$

$$(2.2) \quad y'' - y' - 2y = \sin(2x) - x.$$

$$(2.3) \quad y'' + 4y = \cos(2x).$$

$$(2.4) \quad y'' + 4y' = \cos(2x).$$

$$(2.5) \quad y'' - 3y' + 2y = \sin(2x)e^{2x}.$$

$$(2.6) \quad y'' - y' + 2y = e^{x/2} - \sin\left(\frac{\sqrt{7}}{2}x\right).$$

(3) Trovare le soluzioni dei seguenti problemi di Cauchy (e trovare il dominio delle soluzioni).

(3.1)

$$\begin{cases} y' = (4y^2 + 1)(x - 1) \\ y(1) = 0. \end{cases}$$

(3.2)

$$\begin{cases} y' = y^2(x - 1) \\ y(0) = -1. \end{cases}$$

(3.3)

$$\begin{cases} y' = -3y^3 \cos(2x) \\ y(0) = -1. \end{cases}$$

(3.4)

$$\begin{cases} y' + xy = x^3 \\ y(1) = e^{-1/2}. \end{cases}$$

Soluzioni.

$$(1.1) y : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, y(x) = A \cos(x) + B \sin(x).$$

$$(1.2) y : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, y(x) = Ae^{2x} + Bxe^{2x}.$$

$$(1.3) y : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, y(x) = Ae^{-x} + Be.$$

$$(1.4) y : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, y(x) = Ax + B.$$

$$(1.5) y : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, y(x) = e^{-x} + Be^{-2x}.$$

$$(2.1) y : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, y(x) = Ae^x + Be^{-x} - 2x + 1.$$

$$(2.2) y : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, y(x) = Ae^{-x} + Be^{2x} + \frac{1}{2}x - \frac{1}{4} - \frac{3}{20} \cos(2x) + \frac{1}{20} \sin(2x).$$

$$(2.3) y : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, y(x) = A \cos(2x) + B \sin(2x) + \frac{1}{4}x \sin(2x).$$

$$(2.4) y : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, y(x) = Ae^{-4x} + B - \frac{1}{20} \cos(2x) + \frac{1}{10} \sin(2x).$$

$$(2.5) y : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, y(x) = Ae^x + Be^{2x} - \frac{1}{10} \cos(2x)e^{2x} - \frac{1}{5} \sin(2x)e^{2x}.$$

$$(2.6) y : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, y(x) = \frac{4}{7}e^{x/2} - \frac{8\sqrt{7}}{29} \cos\left(\frac{\sqrt{7}}{2}x\right) - \frac{4}{29} \sin\left(\frac{\sqrt{7}}{2}x\right).$$

$$(3.1) y = \frac{1}{2} \tan((x-1)^2), \quad 1 - \sqrt{\frac{\pi}{2}} < x < 1 + \sqrt{\frac{\pi}{2}}.$$

$$(3.2) y = \frac{-1}{\frac{x^2}{2} - x + 1}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

$$(3.3) y = \frac{-1}{\sqrt{1+3\sin(2x)}}, \quad -\frac{1}{2} \arcsin\left(\frac{1}{3}\right) < x < \frac{\pi}{2} + \frac{1}{2} \arcsin\left(\frac{1}{3}\right).$$

$$(3.4) y = x^2 - 2 + (1 + e^{1/2})e^{-x^2/2}, \quad x \in \mathbb{R}.$$