ESERCIZI SULLE FUNZIONI CONTINUE, con soluzioni

Nicola Arcozzi

Dire quali delle seguenti affermazioni sono necessariamente vere e quali false. Illustrare con una figura e, per le affermazioni false, dare un controesempio concreto.

(1) Sia $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ una funzione continua su $[a, b)$. Allora, f ha massimo in $[a, b)$, ma non in $[a, b]$.

(2) Sia $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ una funzione continua su $[a, b)$, e sia $c \in [a, c)$. Allora,f ha minimo in $[a, c]$.

(3) Sia $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ una funzione continua su $[a, b)$ e discontinua in b. Allora, f non ha massimo in $[a, b]$.

(4) Siano $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ e $g : [a, b] \to \mathbb{R}$ funzioni continue. Allora, $f + g$ ammette massimo in $[a, b]$.

(5) Sia $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ continua, $f(a) = -1$, $f(b) = 1$. Sia $c = \frac{a+b}{2}$ il punto medio di $[a, b]$. Allora, $f(c) = 0$.

(6) Siano $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ e $g : [a, b] \to \mathbb{R}$ funzioni e supponiamo che $f(a) = 0$, $f(b) = 1$, $g(a) = 1$ e $g(b) = 0$. Allora, esiste $x \in [a, b]$ t.c. $f(x) = g(x)$.

(7) Siano $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ e $g : [a, b] \to \mathbb{R}$ funzioni continue e supponiamo che $f(a) = 0$, $f(b) = 1$, $g(a) = 1$ e $g(b) = 0$. Allora, esiste $x \in [a, b]$ t.c. $f(x) = g(x)$.

(8) Siano $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ e $g : [a, b] \to \mathbb{R}$ funzioni continue e supponiamo che $f(a) = 1$, $f(b) = 11$, $g(a) = 2$ e $g(b) = 12$. Allora, esiste $x \in [a, b]$ t.c. $f(x) = g(x)$.

(9) Siano $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ e $g : [a,b] \to \mathbb{R}$ funzioni continue e supponiamo che $f(a) = 1$, $f(b) = -1$, $g(a) = -1$ e $g(b) = -2$. Allora, esiste $x \in [a,b]$ t.c. $f(x) \cdot g(x) = 0$.

(10) Siano $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ e $g : [a,b] \to \mathbb{R}$ funzioni continue e supponiamo che $f(a) = 1$, $f(b) = -1$, $g(a) = -1$ e $g(b) = -1$. Allora, esiste $x \in [a,b]$ t.c. $f(x) + g(x) = f(x) \cdot g(x)$.

(11) Siano $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ e $g : [a,b] \to \mathbb{R}$ funzioni continue, f strettamente crescente e g strettamente crescente, e supponiamo che $f(a) = 0$, e $g(a) = 1$. Allora, esiste $x \in [a,b]$ t.c. $f(x) = g(x)$.

(12) Sia $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ una funzione continua e strettamente crescente su $[a,b]$, $f(a) = -2$ e $f(b) = 1$. Allora, esiste $f^{-1} : [-2,1] \to \mathbb{R}$ e $f^{-1}([-1,0])$ è un intervallo contenuto in $[a,b]$.

Soluzioni. Sono vere (2), (4), (7), (9), (10), (12). Le altre sono false.