Esercizi sulle serie

11 marzo 2003

Trovare per quali valori del parametro x convergono le seguenti serie.

(1) $x \in \mathbb{R}$,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-1)^n}{n^2}$$

(2) $x \in \mathbb{R}$,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{2x} + n^{x^2}}$$

(3) $x \in \mathbb{R}$,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{x^n}$$

(4) $x > 0$,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}$$

Qual'è la risposta se $x \in \mathbb{R}$?

(5) $x \in \mathbb{R}$,

$$\sum_{n=1}^{\infty} (n^{x-2} + n^{-x})$$

(6) $x \in \mathbb{R}$,

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \log^x(n)}$$

(**Suggerimento:** utilizzare il criterio del confronto con gli integrali).

Soluzioni e possibile metodo di soluzione. (1) Criterio del rapporto e confronto con $\sum \frac{1}{n^p}$; $0 \leq x \leq 2$.

(2) Confronto con $\sum \frac{1}{n^p}$; $x < -1$ o $x > 1/2$.

(3) Criterio del rapporto; non converge per alcun $x \in \mathbb{R}$.

(4) Criterio del rapporto e confronto con $\sum \frac{1}{n^p}$ (nel caso $x \in \mathbb{R}$, occorre anche utilizzare il criterio di Leibnitz); $0 < x < 1$ (se $x \in \mathbb{R}$, $-1 \leq x < 1$).

(5) Confronto con $\sum \frac{1}{n^p}$; non converge per alcun $x \in \mathbb{R}$.

(6) Criterio del confronto con integrali; $x > 1$.

Svolgimento di alcuni esercizi.

(2). $a_n = \frac{1}{n^{2x}+n^{x^2}}$ è positivo e contiene solo potenze di n: ha senso confrontare con $\sum 1/n^p$. Il termine principale in $n^{2x}+n^{x^2}$ è n^{2x}, se $2x \geq x^2$ (cioè, se $0 \leq x \leq 2$), ed è n^{x^2} se $2x < x^2$ (cioè, se $x < 0$ o $x > 2$). Dunque, se $0 \leq x \leq 2$, (utilizzo il simpbolo $\equiv$ per successioni asintoticamente equivalenti)

$$a_n = \frac{1}{n^{2x}+n^{x^2}} \equiv \frac{1}{n^{2x}}$$

(a dire il vero, c'è un coefficiente $1/2$ per $x = 0, 2$: perchè?), mentre, se $x < 0$ o $x > 2$,

$$a_n = \frac{1}{n^{2x}+n^{x^2}} \equiv \frac{1}{n^{x^2}}$$

La serie della prima successione converge per $2x > 1$, mentre la serie della seconda converge per $x^2 > 1$. Devo quindi risolvere i sistemi

$$\begin{cases} 0 \leq x \leq 2 \\ 2x > 1 \end{cases}$$

e

$$\begin{cases} x < 0 \quad \text{o } x > 2 \\ x^2 > 1 \end{cases}$$

Le soluzioni del primo sistema sono $1/2 < x \leq 2$, mentre quelle del secondo sono $x < -1$ o $x > 2$. Unendo gli intervalli, si ha la soluzione.

(4). (Caso completo: $x \in \mathbb{R}$). Poichè c'è un esponenziale, può essere utile applicare il criterio del rapporto ad $a_n = \frac{x^n}{n}$. Ottengo

$$|a_{n+1}/a_n| = \left| \frac{x^{n+1}}{n+1} \frac{n}{x^n} \right| = \frac{n}{n+1}|x| \to |x|$$

al tendere di n a infinito. Se $|x| < 1$, la serie converge, se $|x| > 1$, diverge. Rimane da considerare $|x| = 1$. Se $x = 1$, la serie diventa

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$$

che diverge, mentre se $x = -1$, la serie vale

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$$

che converge per il criterio di Leibnitz. Quindi, si ha convergenza per $-1 \leq x < 1$.

(6). In assenza di idee migliori, uso il criterio di confronto con gli integrali. Sia $f(t) = \frac{1}{t \log^x(t)}$, allora, se $R > 2$, integrando per sostituzione,

$$\begin{aligned}
\int_2^R f(t)dt &= \int_2^R \frac{1}{t \log^x(t)} dt \\
&= \int_2^R \frac{1}{\log^x(t)} d\log(t) \\
&= \int_{\log(2)}^{\log(R)} \frac{1}{y^x} dy
\end{aligned}$$

e quest'ultimo integrale (che abbiamo già visto) converge (per $R \to \infty$) se e solo se $x > 1$.