Altri esercizi di ricapitolazione, senza integrali

Michele Gianfelice, Analisi L-A (corso dott. Arcozzi)

December 3, 2003

Sono un pò più difficili di quelli che saranno nelle prove scritte.

1. Studiare il comportamento qualitativo delle funzioni:

   1.1
   $$f(x) = 1 + \frac{2x}{1 + e^{\frac{1}{x}}}; \tag{1}$$

   1.2
   $$f(x) = x \exp[\frac{1}{|x| - 1}]; \tag{2}$$

   identificando:

   - campo d'esistenza (insieme di definizione), D;
   - insieme dei punti di continuità per la $f(x)$, P;
   - limiti ai bordi del campo d'esistenza;
   - asintoti;
   - derivabilità;
   - monotonia;
   - massimi e minini;
   - immagine della funzione, I.

2. Determinare gli intervalli in cui le funzioni 1 e 2 sono invertibili.

3. Studiare la monotonia della funzione:
   $$f(x) = \frac{\sqrt{x^2 - 1}}{|x + 1|}; \tag{3}$$
   identificare gli intervalli del suo campo di esistenza in cui è invertibile e scrivere esplicitamente l'inversa.

4. Calcolare:
   $$\lim_{x \to +\infty} \frac{e^{\frac{1}{2x}} - \sqrt{1 + \log\left(1 + \frac{1}{x}\right)}}{\sqrt{\cos\frac{1}{x}} - \sqrt{\cosh\frac{1}{x}}}. \tag{4}$$

5. Calcolare:

$$\lim_{x\to 0} \frac{(\sinh x)^2 - (\sin x)^2}{e^{x^4} - 1}. \tag{5}$$

6. **Facoltativo** Calcolare i limiti destro e sinistro per $x \to 0$ della derivata prima di 1.

   (Suggerimento: usare per entrambi i limiti un opportuno cambio di variabile.)

1 Soluzioni

1 $D = \mathbb{R}\backslash\{0\}$, $P = D$, $\lim_{x\to 0^\pm} f(x) = 1$, $\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \pm\infty$, asintoto obliquo $y = x + \frac{3}{2}$, $f(x)$ è derivabile ovunque tranne che in $x = 0$, $f(x)$ è monotona decrescente in $(-\infty, x^*)$ e monotona crescente in $(x^*, +\infty)$ dove x^* è lunico zero di $f'(x)$. $f(x)$ ha minimo relativo in $x^* \in (-1, 0)$, $I = \mathbb{R}\backslash\{1\}$.

2 $D = \mathbb{R}\backslash(\{-1\} \cup \{1\})$, $P = D$, $\lim_{x\to 1^+} f(x) = +\infty$, $\lim_{x\to 1^-} f(x) = 0$, $\lim_{x\to -1^-} f(x) = -\lim_{x\to 1^+} f(x)$, $\lim_{x\to -1^+} f(x) = -\lim_{x\to 1^-} f(x)$, $\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \pm\infty$, asintoto obliquo $y = x + 1$, asintoti verticali $x = \pm 1$, $f(x)$ è derivabile ovunque tranne che in $x = \pm 1$, $f(x)$ è monotona decrescente in $\left(-\frac{3+\sqrt{5}}{2}, -1\right) \cup \left(-1, -\frac{3-\sqrt{5}}{2}\right) \cup \left(\frac{3-\sqrt{5}}{2}, 1\right) \cup \left(1, \frac{3+\sqrt{5}}{2}\right)$ e monotona crescente in $\left(-\infty, -\frac{3+\sqrt{5}}{2}\right) \cup \left(-\frac{3-\sqrt{5}}{2}, \frac{3-\sqrt{5}}{2}\right) \cup \left(\frac{3+\sqrt{5}}{2}, +\infty\right)$, massimi relativi $x = -\frac{3+\sqrt{5}}{2}$, $x = \frac{3-\sqrt{5}}{2}$, minimi relativi $x = \frac{3+\sqrt{5}}{2}$, $x = -\frac{3-\sqrt{5}}{2}$, $I = \left[-f\left(\frac{3-\sqrt{5}}{2}\right), f\left(\frac{3-\sqrt{5}}{2}\right)\right] \cup \left[\frac{3+\sqrt{5}}{2}, +\infty\right) \cup \left(-\infty, \frac{3+\sqrt{5}}{2}\right]$

Es.2 Gli intervalli in cui le funzioni sono monotone (vedi soluzione Es. 1).

Es.3 $f(x)$ è monotona crescente in $D = (-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$ ed ivi invertibile, $x = f^{-1}(y) = \frac{1+y^2}{1-y^2}$.

Es.4 -1.

Es.5 $\frac{2}{3}$.

Es.6 $\lim_{x\to 0^+} f'(x) = 0, \lim_{x\to 0^-} f'(x) = 1$.