

## Esercizi sui gradienti: soluzioni

February 5, 2003

Le soluzioni riportano:

(0)  $\nabla u(x, y) = (\cdot, \cdot)$ , gradiente,

$\nabla u(a, b) = (\cdot, \cdot)$ , gradiente calcolato nel punto  $(a, b)$  (serve per differenziale e piano tangente),

$du(a, b)(h, k) = \dots$ , differenziale calcolato nel punto  $(a, b)$ ,

$u(a, b) = \dots$ , valore della funzione in  $(a, b)$  (serve per il piano tangente),

$z = \dots$ , equazione del piano tangente in  $(a, b)$  al grafico della funzione  $u$

(1)  $\nabla u(x, y) = (2xy - 3y^2 - 2x, x^2 - 6xy + 3y^2)$ ,  $\nabla u(0, 1) = (-3, 3)$ ,  
 $du(0, 1)(h, k) = -3h + 3k$ ,  $u(0, 1) = 1$ ,  $z - 1 = -3x + 3(y - 1)$

(2)  $\nabla u(x, y) = (2x, 2y)$ ,  $\nabla u(0, 0) = (0, 0)$ ,  $du(0, 0)(h, k) = 0$ ,  $u(0, 0) = 0$ ,  
 $z = 0$

(3)  $\nabla u(x, y) = (4(x^2 + y^2 + 1)x, 4(x^2 + y^2 + 1)y)$ ,  $\nabla u(0, 0) = (0, 0)$ ,  
 $du(0, 0)(h, k) = 0$ ,  $u(0, 0) = 1$ ,  $z = 1$

(4)  $\nabla u(x, y) = (e^{-x^2-y^2}(1-2x^2), -2xye^{-x^2-y^2})$ ,  $\nabla u(1, 1) = (-e^{-2}, -2e^{-2})$ ,  
 $du(1, 1)(h, k) = -e^{-2}h - 2e^{-2}k$ ,  $u(1, 1) = e^{-2}$ ,  $z = -e^{-2}x - 2e^{-2}y + 4e^{-2}$

(5)  $\nabla u(x, y) = (e^{-x^2-y^2}y(1-2x^2), e^{-x^2-y^2}x(1-2y^2))$ ,  $\nabla u(0, 1) = (e^{-1}, 0)$ ,  
 $du(0, 1)(h, k) = e^{-1}h$ ,  $u(0, 1) = 0$ ,  $z = e^{-1}x$

(6)  $\nabla u(x, y) = (e^{x^2}[2x \sin(xy) + \cos(xy)y], e^{x^2} \cos(xy)x)$ ,  $\nabla u(1, \pi/2) =$   
 $(2e, 0)$ ,  $du(1, \pi/2)(h, k) = 2e(x - 1)$ ,  $u(1, \pi/2) = e$ ,  $z = 2ex - e$

(7)  $\nabla u(x, y) = (\frac{(y^2-x^2)y}{(x^2+y^2)^2}, \frac{(x^2-y^2)x}{(x^2+y^2)^2})$ ,  $\nabla u(-1, 2^{1/2}) = (2^{1/2}/9, 1/9)$ ,  $du(-1, 2^{1/2})(h, k) =$   
 $(2^{1/2}/9)h + k/9$ ,  $u(-1, 2^{1/2}) = -2^{1/2}/3$ ,  $z - 2^{1/2}/3 = (2^{1/2}/9)(x + 1) +$   
 $(1/9)(y - 2^{1/2})$

(8)  $\nabla u(x, y, z) = (2xz - yz + y^2, -xz + 2xy, x^2 - xy)$ ,  $\nabla u(-3, 2, 0) =$   
 $(4, -12, 15)$ ,  $du(-3, 2, 0)(h, k, s) = 4h - 12k + 15s$ ,  $u(-3, 2, 0) = -12$ ,  $w =$   
 $4x - 12y + 15z + 24$  (dove  $w = u(x, y, z)$ )

(9)  $\nabla u(x, y) = (-\phi(x), \phi(y))$ ,  $\nabla u(0, 0) = (-\phi(0), \phi(0))$ ,  $du(0, 0)(h, k) =$   
 $\phi(0)(k - h)$ ,  $u(0, 0) = 0$ ,  $z = \phi(0)(y - x)$  (significato?)

(10)  $\nabla u(x, y) = (2x, 0)$ ,  $\nabla u(1, 0) = (2, 0)$ ,  $du(1, 0)(h, k) = 2h$ ,  $u(1, 0) =$   
 $1$ ,  $z = 2x - 1$