Esercizi sulla derivazione di funzioni composte

January 30, 2003

(1) Sia $f \in C^1(\mathbb{R}^3, \mathbb{R})$ e sia
$$g(x, y, z) = f(x^2 y, x + z, \sin(x))$$
Calcolare $\nabla g(0, 1, 1)$ e $\frac{\partial g}{\partial x}(0, 1, 1)$.

(2) Sia $f \in C^1(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$ e sia
$$g(x, y) = (f(x, x^2), y)$$
Scrivere $Jg(1, 1)$.

(3) Siano $f, g \in C^1(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$ e sia
$$h(x, y) = f(xy, g(x, y))$$
Scrivere $\nabla h(1, 0)$.

(4) Siano $f, g \in C^1(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$ e sia
$$v(x, y, z) = (f(x, z), g(x, x)y)$$
Scrivere $Jv(0, 1, 0)$.

(5) Sia $f \in C^1(\mathbb{R}^3, \mathbb{R})$ e sia
$$g(x) = f(x, xe^x, 1)$$
Calcolare $g'(x)$.

Soluzioni. (1) Sia $f = f(u, v, s)$. Allora $\nabla g(0, 1, 1) = (\partial_v f(0, 1, 0) + \partial_s f(0, 1, 0), 0, \partial_v f(0, 1, 0))$ e $\partial_x g(0, 1, 1) = \partial_v f(0, 1, 0) + \partial_s f(0, 1, 0)$. (2) Sia $f = f(u, v)$. Allora
$$Jg(1,1) = \begin{bmatrix} \partial_u f(1,1) + 2\partial_v f(1,1) & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$
(3) Sia$f = f(u, v)$. Allora, $\nabla h(1, 0) = (\partial_v f(0, g(1, 0))\partial_x g(1, 0), \partial_u f(0, g(1, 0)) + \partial_v f(0, g(1, 0))\partial_y g(1, 0))$. (4) Sia $g = g(u, w)$. Allora,
$$Jv(0,1,0) = \begin{bmatrix} \partial_x f(0,0) & 0 & \partial_z f(0,0) \\ \partial_u g(0,0) + \partial_w g(0,0) & g(0,0) & 0 \end{bmatrix}$$
(5) Se $f = f(u, v)$, allora $g'(x) = \partial_u f(x, xe^x, 1) + \partial_v f(x, xe^x, 1)e^x(x + 1)$.