

## Integrali doppi e tripli

27 febbraio 2003

**NOTA BENE:** esistono più maniere per scrivere un integrale doppio in forma di integrali ripetuti.

(1) Sia  $D$  un dominio del piano e  $f$  una funzione continua su  $D$ . Scrivere  $\int_D f(x, y) dx dy$  in forma di integrali ripetuti nelle variabili  $x$  e  $y$ , dove

$$D = \{(x, y) : |x| \geq 1 \text{ o } |y| \geq 1, \text{ e } x^2 + y^2 \leq 2\}$$

(In altre parole,  $D$  è l'unione dei domini  $D_1 = \{(x, y) : |x| \geq 1, x^2 + y^2 \leq 2\}$  e  $D_2 = \{(x, y) : |y| \geq 1, x^2 + y^2 \leq 2\}$ ). Quale dei seguenti numeri è l'integrale per la funzione  $f(x, y) = x$ ? (i) 0, (ii)  $\pi$ , (iii)  $\pi - 2\sqrt{2}$ , (iv)  $\pi + 2\sqrt{2}$

(2) Sia  $D$  un dominio del piano e  $f$  una funzione continua su  $D$ . Scrivere  $\int_D f(x, y) dx dy$  in forma di integrali ripetuti nelle variabili  $x$  e  $y$ , dove

$$D = \{(x, y) : x \geq 0, 1 \leq x^2 + y^2 \leq 4\}$$

Quale dei seguenti numeri è l'integrale per la funzione  $f(x, y) = x^2 + y$ ?

(i) 0, (ii)  $13/32\pi$ , (iii)  $15/8\pi$ , (iv)  $13/16\pi$

(3) Sia  $D$  un dominio del piano e  $f$  una funzione continua su  $D$ . Scrivere  $\int_D f(x, y) dx dy$  in forma di integrali ripetuti nelle variabili  $x$  e  $y$ , dove

$$D = \{(x, y) : 0 \leq x \leq y \leq 1\}$$

Quale dei seguenti numeri è l'integrale per la funzione  $f(x, y) = x^2 y$ ?

(i) 0, (ii)  $3/15$ , (iii)  $2/15$ , (iv)  $1/15$

(4) Sia  $D$  un dominio del piano e  $f$  una funzione continua su  $D$ . Scrivere  $\int_D f(x, y) dx dy$  in forma di integrali ripetuti in coordinate polari, dove

$$D = \{(x, y) : -y \leq x \leq y, 4 \leq x^2 + y^2 \leq 16\}$$

Quale dei seguenti numeri è l'integrale per la funzione  $f(x, y) = \sin(x^2 + y^2)$ ?

(i) 0, (ii)  $\pi/4(\cos(4) - \cos(16))$ , (iii)  $\pi/2$ , (iv)  $\pi/4(\arccos(4) - \arccos(1))$

**Soluzioni.** (1)  $\int_{-\sqrt{2}}^{-1} dx \int_{-\sqrt{2-x^2}}^{\sqrt{2-x^2}} dy f(x, y) + \int_{-1}^1 dx \int_{-\sqrt{2-x^2}}^{-1} dy f(x, y)$

$$+ \int_{-1}^1 dx \int_1^{\sqrt{2-x^2}} dy f(x, y) + \int_1^{\sqrt{2}} dx \int_{-\sqrt{2-x^2}}^{\sqrt{2-x^2}} dy f(x, y), \text{ (i)}$$

$$(2) \int_0^1 dx \int_{-\sqrt{4-x^2}}^{-\sqrt{1-x^2}} dy f(x, y) + \int_0^1 dx \int_{\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}} dy f(x, y) + \int_1^2 dx \int_{-\sqrt{4-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}} dy f(x, y),$$

(iii).

$$(3) \int_0^1 dx \int_x^1 dy f(x, y), \text{ (iv)}$$

$$(4) \int_1^2 \rho d\rho \int_{\pi/4}^{3/4\pi} d\theta f(\rho \cos(\theta), \rho \sin(\theta)), \text{ (ii)}$$