Esercizi sugli integrali curvilinei di prima specie

22 febbraio 2003

Gli esercizi sono divisi in due parti: trovare l'integrale in una variabile che esprime un certo integrale di linea, quindi calcolarlo. L'esercizio (4) è un pò diverso dagli altri!

(1) Sia f una funzione continua da $\mathbb{R}^3$ a $\mathbb{R}$. Sia r la curva

$$r(t) = (t, \sin(t), t^2), \ 0 \leq t \leq 6\pi$$

e sia γ il suo sostegno.

(a) Scrivere l'integrale in una variablile che esprime $\int_\gamma f ds$.

(b) Quale dei seguenti numeri è uguale a $\int_\gamma f ds$ per la funzione

$$f(x, y, z) = \frac{x}{\sqrt{1 + \cos^2(x) + 4x^2}}?$$

(i) 0, (ii) 6π, (iii) $18\pi^2$, (iv) $2\pi^2$.

(2) Sia f una funzione continua da $\mathbb{R}^2$ a $\mathbb{R}$. Sia r la curva

$$r(t) = (t^2, \cos(t)), \ 0 \leq t \leq 4\pi$$

e sia γ il suo sostegno.

(a) Scrivere l'integrale in una variablile che esprime $\int_\gamma f ds$.

(b) Quale dei seguenti numeri è uguale a $\int_\gamma f ds$ per la funzione

$$f(x, y) = \frac{y^2}{\sqrt{1 - y^2 + 4x}}?$$

(i) 0, (ii) $8\pi^2$, (iii) $64\pi^4$, (iv) 2π.

(3) Sia f una funzione continua da $\mathbb{R}^3$ a $\mathbb{R}$. Sia r la curva

$$r(t) = (\cos(t) + 1, \sin(t), t + \sin(t)), \ -\pi \leq t \leq \pi$$

e sia γ il suo sostegno.

(a) Scrivere l'integrale in una variablile che esprime $\int_\gamma f ds$.

(b) Quale dei seguenti numeri è uguale a $\int_\gamma f ds$ per la funzione

$$f(x, y, z) = \frac{z}{\sqrt{2x + 1 - y^2}}?$$

(i) 0, (ii) 2π, (iii) $2\pi^2$, (iv) π^2.

(4) Sia γ la frontiera di D,

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \ x + y \leq 1, \ x \geq 0, \ y \geq 0\}$$

Sia f una funzione continua da $\mathbb{R}^2$ a $\mathbb{R}$.

(a) Scrivere l'integrale in una variabile che esprime $\int_\gamma f ds$.

(b) Quale dei seguenti numeri è uguale a $\int_\gamma f ds$ per la funzione

$$f(x, y) = x(y + 1)?$$

(i) 0, (ii) $\frac{2}{3}\sqrt{2}$ (iii) $\frac{1}{2} + \frac{2}{3}\sqrt{2}$, (iv) $\frac{1}{2} - \frac{2}{3}\sqrt{2}$.

Soluzioni (attenzione, lo stesso integrale può essere scritto in maniere diverse; ciò è vero in particolare per (4),).

(1): (a) $\int_\gamma f ds = \int_0^{6\pi} f(t, \sin(t), t^2)\sqrt{1 + \cos^2(t) + 4t^2}dt$; (b) (iii).

(2): (a) $\int_\gamma f ds = \int_0^{4\pi} f(t^2, \cos(t))\sqrt{4t^2 + \sin^2(t)}dt$; (b) (iv).

(3): (a) $\int_\gamma f ds = \int_{-\pi}^{\pi} f(\cos(t)+1, \sin(t), t+\sin(t))\sqrt{2 + 2\cos(t) + 2\cos^2(t)}dt$; (b) (i)

(4): (a) $\int_\gamma f df = \int_0^1 f(t, 0)dt + \int_0^1 f(0, t)dt + \sqrt{2}\int_0^1 f(t, 1 - t)dt$; (b) (iii)

Svolgimento di alcuni esercizi. **(3)** Innanzitutto, calcolo r' e il suo modulo.

$$r'(t) = (-\sin(t), \cos(t), 1 + \cos(t)),$$

$$|r'(t)| = \sqrt{\sin^2(t) + \cos^2(t) + (1 + \cos(t))^2} = \sqrt{2 + 2\cos(t) + \cos^2(t)}$$

Dunque, l'integrale di f su γ è

$$\begin{aligned} \int_\gamma f ds &= \int_{-\pi}^{\pi} f(r(t))|r'(t)|dt \\ &= \int_{-\pi}^{\pi} f(\cos(t) + 1, \sin(t), t + \sin(t))\sqrt{2 + 2\cos(t) + \cos^2(t)}dt \end{aligned}$$

Questo dà la soluzione della prima parte dell'esercizio. Per la seconda, sostituiamo la funzione f data,

$$f(x, y, z) = \frac{z}{\sqrt{2x + 1 - y^2}}.$$

Quindi,

$$\begin{aligned} f(\cos(t)+1, \sin(t), t+\sin(t)) &= \frac{t+\sin(t)}{\sqrt{2(\cos(t)+1)+1-\sin^2(t)}} \\ &= \frac{t+\sin(t)}{\sqrt{2\cos(t)+2+\cos^2(t)}} \end{aligned}$$

Calcolando,

$$\begin{aligned} \int_\gamma f ds &= \int_{-\pi}^{\pi} \frac{t+\sin(t)}{\sqrt{2\cos(t)+2+\cos^2(t)}} \sqrt{2+2\cos(t)+\cos^2(t)} dt \\ &= \int_{-\pi}^{\pi} (t+\sin(t)) dt \\ &= (t^2/2 - \cos(t))_{-\pi}^{\pi} \\ &= 0 \end{aligned}$$

La risposta giusta è (i).

(La curva di questo esercizio è un oggetto divenuto famoso in anni recenti. Si tratta di una *geodetica per il gruppo di Heisenberg*: l'oggetto corrspondente alle normali rette euclidee in $\mathbb{R}^3$, quando questo è dotato di una geometria altamente *non eulidea*. Provate a fare un disegno: vedrete che questa curva r spiraleggia).

(4) Il primo problema è quello di *parametrizzare* γ, cioè, di trovare una o più curve che abbiano γ come sostegno. Ora, D è un triangolo rettangolo isocele, la cui frontiera γ è data (fate un disegno!) dall'unione dei tre segmenti $a = \{(x,y) : \ y = 0, \ 0 \leq x \leq 1\}$, $b = \{(x,y) : \ x = 0, \ 0 \leq y \leq 1\}$, $c = \{(x,y) : \ x+y = 1, \ 0 \leq x \leq 1\}$. Questi segmenti si intersecano solo agli estremi. Li parametrizzo con le seguenti curve (attenzione, questa è solo una delle *infinite* possibili parametrizzazioni: voi potete scegliere quella che più vi aggrada): $r_1(t) = (t,0), \ 0 \leq t \leq 1$ (il cui sostegno è a), $r_2(t) = (0,t), \ 0 \leq t \leq 1$ (il cui sostegno è b), $r_3(t) = (t, 1-t), \ 0 \leq t \leq 1$ (il cui sostegno è c).

Un veloce calcolo mostra che, per ogni t nei rispettivi domini, $|r_1'(t)| = 1$, $|r_2'(t)| = 1$, $|r_3'(t)| = \sqrt{2}$.

L'integrale di f su γ è quindi dato da

$$\begin{aligned} \int_\gamma f ds &= \int_a f ds \int_b f ds \int_c f ds \\ &= \int_0^1 f(t,0) dt + \int_0^1 f(0,t) dt + \int_0^1 f(t,1-t)\sqrt{2} dt \end{aligned}$$

Questo dà la risposta al primo questito. Per il secondo, sostituiamo $f(x,y) = x(y+1)$ e otteniamo

$$\int_\gamma f ds = \int_0^1 f(t,0) dt + \int_0^1 f(0,t) dt + \int_0^1 f(t,1-t)\sqrt{2} dt$$

$$
\begin{aligned}
&= \int_0^1 t(0+1)dt + \int_0^1 0(t+1)dt + \int_0^1 t(1-t+1)\sqrt{2}dt \\
&= = (t^2/2)_0^1 + \sqrt{2}(t^2 - t^3/3)_0^1 \\
&= 1/2 + \sqrt{2}(1-1/3) = \frac{1}{2} + \frac{2}{3}\sqrt{2}
\end{aligned}
$$

e la risposta è dunque (iii).