Esercizi sui campi vettoriali

1. Trovare il valore della costante A tale che il campo vettoriale:

$$\mathbb{R}^2 \ni (x,y) \longmapsto F(x,y) = \left(Axy, x^2 - y^2\right) \in \mathbb{R}^2$$

   (a) è chiuso;

   (b) è conservativo.

Svolgimento:.

a. Poniamo

$$\begin{aligned} &F(x,y) = (u(x,y), v(x,y)) \\ &u(x,y) = Axy \\ &v(x,y) = x^2 - y^2 \end{aligned}$$

Cerchiamo allora i valori di A tali che $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$

$$\partial_x v(x,y) = \partial_y u(x,y)$$

cioè poiché

$$\begin{aligned} \partial_x v(x,y) &= 2x \\ \partial_y u(x,y) &= Ax \end{aligned}$$

dev'essere (per *ogni* (x,y) nel dominio di F!)

$$2x = Ax$$

quindi $A = 2$.

b. F è conservativo se esiste una funzione

$$\mathbb{R}^2 \ni (x,y) \longmapsto W(x,y) \in \mathbb{R}$$

detta *potenziale,* tale che

$$\nabla W = (\partial_x W, \partial_y W) = F = \left(2xy, x^2 - y^2\right)$$

quindi si ha

$$\begin{aligned} \partial_x W(x,y) &= 2xy \Longrightarrow W(x,y) = x^2 y + c(y) \\ \partial_y W(x,y) &= x^2 - y^2 \Longrightarrow W(x,y) = x^2 y - \frac{y^3}{3} + d(x) \end{aligned}$$

dunque $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$ dev'essere

$$\begin{aligned} &x^2 y + c(y) = x^2 y - \frac{y^3}{3} + d(x) \\ &c(y) + \frac{y^3}{3} = d(x) \end{aligned}$$

il che implica che esiste una costante $k \in \mathbb{R}$[1], tale che

$$d(x) = k$$
$$c(y) = -\frac{y^3}{3} + k$$

Allora

$$W(x,y) = x^2 y - \frac{y^3}{3} + k \quad k \in \mathbb{R}$$

■

2. Trovare il valore della costante A tale che il campo vettoriale:

$$\mathbb{R}^2 \ni (x,y) \longmapsto F(x,y) = \left(-Axe^{-x^2+y^2}, 2ye^{-x^2+y^2}\right) \in \mathbb{R}^2$$

   (a) è chiuso;
   (b) è conservativo.

Risposta: a.) $A = 2$ b.) $W(x,y) = \left(e^{-x^2+y^2}\right) + k \quad k \in \mathbb{R}$.

3. Trovare il valore della costante A tale che il campo vettoriale:

$$\mathbb{R}^2 \ni (x,y) \longmapsto F(x,y) = (e^x \sin y, e^x \cos Ay) \in \mathbb{R}^2$$

   (a) è chiuso;
   (b) è conservativo.

Risposta: a.) $A = 1$ b.) $W(x,y) = (e^x \sin y) + k \quad k \in \mathbb{R}$.

4. Trovare il valore della costante A tale che il campo vettoriale:

$$\mathbb{R}^2 \ni (x,y) \longmapsto F(x,y) = \left(6x - 3x^2 y, 2Ay - x^3\right) \in \mathbb{R}^2$$

   (a) è chiuso;
   (b) è conservativo.

Risposta: a.) $A \in \mathbb{R}$ qualsiasi b.) $W(x,y) = 3x^2 + Ay^2 - x^3 y + k \quad k \in \mathbb{R}$.

[1] Questo fatto lo abbiamo visto in svariati casi a lezione, con alemno due spiegazioni diverse, e c'è un esempio sul Bramanti-Pagani-Salsa.