Esercizi sull'equazioni differenziali a coefficienti costanti (Verificate le soluzioni col programma online che vi ho indicato). Gli ultimi due esrecizi sono di un tipo che non apparirà nel secondo parziale. Eìmportante sapere che l'integrale generale di un' equazione differenziale lineare può sempre essere scritto in maniere diverse.

Risolvere il problema di Cauchy delle seguenti equazioni differenziali esplicitandone in primo luogo l'integrale generale:

- $$\begin{cases} y'' - 3y' + 2y = 2x^3 + x \\ y'(0) = 1 \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

Soluzione:. Integrale generale:

$$esy\,(x; C_1, C_2) = C_1 e^x + C_2 e^{2x} + x^3 + \frac{9}{2}x^2 + 11x + 12$$

Problema di Cauchy: $y(x) = y(x; C_1, C_2)$ con $C_1 = -12$, $C_2 = 1$. Cioè, $y(x) = -12e^x + e^{2x} + x^3 + \frac{9}{2}x^2 + 11x + 12$. ■

Svolgimento per esteso. La soluzione del problema di Cauchy avviene in tre fasi: (1) risolvere l'omogenea associata all'equazione differenziale; (2) trovare una soluzione particolare dell'equazione differenziale (e così, sommando, abbiamo l'integrale generale); (3) sostituire nell'integrale generale le condizioni iniziali pewr trovare (l'*unica*) soluzione del problema di Cauchy.

(1) L'equazione omogenea asociata a $y'' - 3y' + 2y = 2x^3 + x$ è l'equazione $z'' - 3z' + 2z = 0$ (ho cambiato nome alla funzione incognita per evitare confusioni). Per risolverla, cerco soluzioni del tipo $z = e^{\lambda x}$. Una z di questo tipo è soluzione se e solo se $\lambda^2 - 3\lambda + 2 = 0$. Risolvo, e trovo $\lambda = 1, 2$. L'integrale generale dell'omogenea è quindi

$$z(x) = C_1 e^x + C_2 e^{2x}$$

(2) Poichè il termine noto dell'equazione differenziale è un polinomio di terzo grado e l'equazione caratteristica dell'omogenea non ha $\lambda = 0$ tra le sue soluzioni, sono sicuro di trovare una soluzione tra i polinomi di terzo grado. Sostituisco nell'equazione $y(x) = Ex^3 + Ax^2 + Bx + C$ (quindi, $y'(x) = 3Ex^2 + 2Ax + B$ e $y''(x) = 6Ex + 2A$), ottenendo l'equazione

$$[6Ex + 2A] - 3[3Ex^2 + 2Ax + B] + 2[Ex^3 + Ax^2 + Bx + C] = 2x^3 + x$$

(che deve essere verificata da *ogni* valore di x). Raccogliendo uguali potenze di x, abbiamo che questa y è soluzione se, e solo se,

$$[2E - 2]x^3 + [-9E + 2A]x^2 + [6E - 6A + 2B - 1]x + [2A - 3B + 2C] =$$

quindi, devo risolvere il sistema

$$\begin{cases} 2E = 2 \\ -9E + 2A = 0 \\ 6E - 6A + 2B = 1 \\ 2A - 3B + 2C = 0 \end{cases}$$

Risolvo il sistema (provvidenzialmente in forma normale): $E = 1$, $A = 9/2$, $B = 11$, $C = 12$.

Una soluzione particolare è, quindi, $y(x) = x^3 + \frac{9}{2}x^2 + 11x + 12$, mentre l'**integrale generale** dell'equazione differenziale si ottiene sommando a questa soluzione particolare l'integrale generale dell'omogenea associata:

$$y(x; C_1, C_2) = C_1 e^x + C_2 e^{2x} + x^3 + \frac{9}{2}x^2 + 11x + 12$$

(**3**) Tra tutte le soluzioni, cerco quella che soddisfa le condizioni iniziali.

$$1 = y(0) = C_1 + C_2 + 12$$

e $y'(x) = C_1 e^x + 2C_2 e^{2x} + 3x^2 + 9x + 11$, quindi

$$1 = y'(0) = C_1 + 2C_2 + 11$$

Devo quindi risolvere il sistema

$$\begin{cases} C_1 + C_2 = -11 \\ C_1 + 2C_2 = -10 \end{cases}$$

che mi dà $C_1 = -12$ e $C_2 = 1$. Sostituendo nell'integrale generale, trovo la soluzione del problema di Cauchy,

$$y(x) = -12e^x + e^{2x} + x^3 + \frac{9}{2}x^2 + 11x + 12$$

•

$$\begin{cases} y'' - 3y' = 2x + 1 \\ y'(0) = -5/9 \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

Soluzione:. Integrale generale:

$$y(x; C_1, C_2) = C_1 + C_2 e^{3x} - 1/3x^2 - 5/9x$$

Problema di Cauchy: $y(x) = y(x; C_1, C_2)$ con $C_1 = 1$, $C_2 = 0$. ■

Suggerimento. C'è della *risonanza*, poichè $\lambda = 0$ è soluzione dell'equazione caratteristica e il termine noto è un polinomio. Quindi, soluzioni particolari vanno cercate nella forma $y(x) = xP(x)$, con P polinomio di primo grado.

C'è un'altra maniera per affrontare il problema. Ponendo $y' = w$, la nostra equazione diventa $w' - 3w = 2x + 1$. Trovo una soluzione particolare di questa, w, dopodichè una soluzione particolare dell'equazione in y sarà una qualsiasi primitiva di w.

- $$\begin{cases} y'' - 3y' + 2y = \cos x \\ y'(0) = 1 \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

  Soluzione:. Integrale generale:

  $$y(x; C_1, C_2) = C_1 e^x + C_2 e^{2x} + \frac{1}{10}\cos x - \frac{3}{10}\sin x$$

  Problema di Cauchy: $y(x) = y(x; C_1, C_2)$ con $C_1 = \frac{1}{2}$, $C_2 = \frac{2}{5}$. $\blacksquare$

  Suggerimento. Poichè il termine noto è $\cos(x)$ e $\lambda = i$ non è soluzione dell'equazione caratteristica, cercherò soluzioni particolari del tipo $y(x) = A\cos(x) + B\sin(x)$.

- (L'esercizio del secondo parziale avrà meno conti da fare.)

  $$\begin{cases} y'' - y' + y = e^{\frac{x}{2}} \cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right) \\ y'(0) = 1 \\ y(0) = 2 \end{cases}$$

  Soluzione:. Integrale generale:

  $$y(x; C_1, C_2) = C_1 e^{\frac{x}{2}} \cos\left(x\frac{\sqrt{3}}{2}\right) + C_2 e^{\frac{x}{2}} \sin\left(x\frac{\sqrt{3}}{2}\right) + \frac{1}{\sqrt{3}} x e^{\frac{x}{2}} \sin\left(x\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

  Nota. Possiamo scrivere l'integrale in maniera differente (anche se ciò non è necessario al fine dei calcoli che dobbiamo fare). Ponendo[1]

  $$\begin{aligned} C_1 &= \alpha\sin\phi\,,\ C_2 = \alpha\cos\phi \\ y(x; \alpha, \phi) &= \alpha e^{\frac{x}{2}} \sin\left(x\frac{\sqrt{3}}{2} + \phi\right) + \frac{1}{\sqrt{3}} x e^{\frac{x}{2}} \sin\left(x\frac{\sqrt{3}}{2}\right) \end{aligned}$$

  Problema di Cauchy: è più conveniente, per risolvere un problema di Cauchy di questo tipo, usare la seconda rappresentazione dell'integrale generale, per cui si ha $y(x) = y(x; \alpha, \phi)$ con $\alpha = 2$, $\phi = \frac{\pi}{2}$ o alternativamente $y(x) = y(x; C_1, C_2)$ con $C_1 = 2$, $C_2 = 0$. $\blacksquare$

  Suggerimento. C'è un problema di risonanza. Le soluzioni dell'equazione caratteristica sono $\lambda = 1/2 \pm i\sqrt{3}/2$, e il termine noto dell'equazione differenziale è combinazione lineare (complessa) di $e^{\frac{1+i\sqrt{3}}{2}x}$ e $e^{\frac{1-i\sqrt{3}}{2}x}$,

  $$e^{\frac{x}{2}} \cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right) = 1/2\left(e^{\frac{1+i\sqrt{3}}{2}x} + e^{\frac{1-i\sqrt{3}}{2}x}\right)$$

  Quindi, cerco soluzioni particolari del tipo $y(x) = Axe^{\frac{x}{2}} \cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right) + Bxe^{\frac{x}{2}} \sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right)$.

[1] perché è sempre possibile passare a questa rappresentazione della soluzione?

- $$\begin{cases} y'' - y' + y = x + 5 \\ y'(0) = 2 \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

Soluzione:. Integrale generale:

$$\begin{aligned} y(x; C_1, C_2) &= C_1 e^{\frac{x}{2}} \cos\left(x\frac{\sqrt{3}}{2}\right) + C_2 e^{\frac{x}{2}} \sin\left(x\frac{\sqrt{3}}{2}\right) + x + 6 \\ \text{oppure } y(x; \alpha, \phi) &= \alpha e^{\frac{x}{2}} \sin\left(x\frac{\sqrt{3}}{2} + \phi\right) + x + 6 \end{aligned}$$

Problema di Cauchy: $y(x) = y(x; C_1, C_2)$ con $C_1 = -5$, $C_2 = \frac{7}{\sqrt{3}}$. ■

- $$\begin{cases} y'' - y' - 6y = e^x \\ y'(0) = 0 \\ y(0) = 0 \end{cases}$$

Soluzione:. Integrale generale:

$$y(x; C_1, C_2) = C_1 e^{3x} + C_2 e^{-2x} - 1/6e^x$$

Problema di Cauchy: $y(x) = y(x; C_1, C_2)$ con $C_1 = 1/10$, $C_2 = 1/15$. ■

- $$\begin{cases} y'' - y' - 6y = e^{3x} \\ y'(0) = 1/5 \\ y(0) = 0 \end{cases}$$

Soluzione:. Integrale generale:

$$y(x; C_1, C_2) = C_1 e^{3x} + C_2 e^{-2x} + 1/5xe^{3x}$$

Problema di Cauchy: $y(x) = y(x; C_1, C_2)$ con $C_1 = 0$, $C_2 = 0$. ■

Suggerimento. Risonanza.

- $$\begin{cases} y'' - 3y' + 2y = xe^x \\ y'(0) = 1 \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

Soluzione:. Integrale generale:

$$y(x; C_1, C_2) = (C_1 - 1)e^x + C_2 e^{2x} - xe^x - \frac{x^2}{2}e^x$$

Problema di Cauchy: $y(x) = y(x; C_1, C_2)$ con $C_1 = C_2 = 1$. ■

Suggerimento. Questo tipo di equazioni non lo abbiamo ancora visto (e non sarà nel secondo parziale). Si tratta della tipologia

$$ay'' + by' + cy = P(x)e^{\mu x}$$

con P polinomio. Se μ non è soluzione dell'equazione caratteristica $a\lambda^2 + b\lambda + c = 0$, allora si cerca una soluzione del tipo $y(x) = Q(x)e^{\mu x}$, dove Q è un polinomio avente lo stesso grado di P. Se μ è soluzione (non doppia) dell'equazione caratteristica, allora si cerca una soluzione $y(x) = Q(x)e^{\mu x}$, dove Q è un polinomio di grado $gr(Q) = gr(P) + 1$. Se è soluzione doppia, poniamo invece $gr(Q) = gr(P) + 2$.

Qui c'è un problema di risonanza, poichè il termine noto è xe^x e $\lambda = 1$ è soluzione dell'equazione caratteristica. Cerchiamo quindi una soluzione particolare del tipo $e^x P(x)$, con P polinomio di secondo grado.

- $$\begin{cases} y'' - 2y' + y = x \sin x \\ y'(0) = 1 \\ y(0) = 0 \end{cases}$$

Soluzione:. Integrale generale:

$$y(x; C_1, C_2) = C_1 e^x + C_2 x e^x + \frac{1}{2}(1 + x)\cos x - \frac{1}{2}\sin x$$

Problema di Cauchy: $y(x) = y(x; C_1, C_2)$ con $C_1 = \frac{1}{2}$, $C_2 = \frac{3}{2}$. ■

Suggerimento. Come sopra, siamo in un caso del tipo $ay'' + by' + cy = P(x)e^{\mu x}$, con $\mu = \pm i$ e $P(x) = x$.