ESERCIZI SULLA DERIVABILITÀ

Nicola Arcozzi, Analisi Matematica L-A

November 26, 2003

(1) Sia f una funzione continua in $[-1,0]$ e derivabile in $(-1,0)$. Quali delle seguenti affermazioni sono necessariamente vere?

(a) Esiste $c \in [-1,0]$ tale che $f'(c) = 0$.
(b) Esiste $c \in (-1,0)$ tale che $f'(c) = 0$.
(c) Esiste $c \in (-1,0]$ tale che $f(0) - f(-1) = f'(c)$.
(d) Esiste $c \in [-1,0)$ tale che $f(-1) - f(0) = f'(c)$.
(e) f ha minimo in $[-1,0]$.
(f) Se $f(-1/2) = f(0) = -1$, allora esiste $c \in [-1,0]$ tale che $f'(c) = 0$.
(g) Se $f(-1/2) = f(0) = -1$, allora esiste $c \in (-1/2,0)$ tale che $f'(c) = 0$.
(h) Esiste $c \in (-1,0)$ tale che $2(f(-1/2) - f(-1)) = f'(c)$.
(i) Esiste $c \in (-1,0)$ tale che $2(f(-1) - f(-1/2)) = f'(c)$.
(j) Se f ha massimo in $x = -1$ e f è derivabile in $x = -1$, allora $f'(-1) = 0$.
(k) Se f ha massimo in $x = -1/2$, allora $f'(-1/2) = 0$.
(l) Se $f'(x) = 0$ per ogni $x \in (-1,0)$, allora $f(x) = f(0)$ per ogni $x \in (-1,0)$.
(m) f è continua in $[-1,0]$.
(n) Se f è strettamente crescente, allora $f'(-1/2) > 0$.
(o) Se f è strettamente decrescente, allora $f'(-1/2) \leq 0$.
(p) Se f è strettamente crescente su $(-1,-1/2)$, allora $f'(-1/2) = 0$.
(q) Se f è strettamente crescente su $(-1,-1/2)$, allora $f'(-1/2) \geq 0$.
(r) Se f è strettamente crescente su $(-1,-1/2)$ e strettamente decrescente su $(-1/2,0)$, allora $f'(-1/2) = 0$.
(s) Se $f'(x) = 0$ solo per $x = -1/2$, allora $x = -1/2$ è necessariamente un punto di massimo relativo o di minimo relativo.

(2) Sia f una funzione continua in $[0,2]$ e derivabile in $(0,1) \cup (1,2)$. Quali delle seguenti affermazioni sono necessariamente vere?

(a) Esiste $c \in (0,2)$ tale che $f(2) - f(0) = 2f'(c)$.
(b) Esiste $c \in (0,2)$ tale che $f(0) - f(2) = 2f'(c)$.
(c) Non esiste $c \in (0,2)$ tale che $f(2) - f(0) = 2f'(c)$.
(d) Esiste $c \in (1,2)$ tale che $f(1) - f(0) = f'(c)$.

(e) Se f ha massimo per $x = 1$, allora $f'(1) = 0$.

(e') Se f ha massimo per $x = 1$ e f è derivabile in $x = 1$, allora $f'(1) = 0$.

(f) Se $f'(x) \geq 0$ su $(0, 1)$ e $f'(x) \leq 0$ su $(1, 2)$, allora f ha massimo per $x = 1$.

(g) Se $f'(x) \geq 0$ su $(1/2, 1)$ e $f'(x) \leq 0$ su $(1, 2)$, allora f ha massimo per $x = 1$.

(h) Se $f'(x) \geq 0$ su $(1/2, 1)$ e $f'(x) \leq 0$ su $(1, 2)$, allora f ha massimo relativo per $x = 1$.

(i) Se $f'(x) \geq 0$ su $(0, 1)$ e $f'(x) \leq 0$ su $(1, 2)$, allora f ha un minimo relativo per $x = 2$.

(3) Sia $f : [0, 2] \to \mathbb{R}$ una funzione continua in $[0, 1) \cup (1, 2]$ e derivabile in $(0, 1) \cup (1, 2)$. Quali delle seguenti affermazioni sono necessariamente vere?

(a) Esiste $c \in (1, 2)$ tale che $f(1) - f(0) = f'(c)$.

(b) Se f ha massimo per $x = 1$, allora $f'(1) = 0$.

(c) Se f ha massimo per $x = 1$ e f è derivabile in $x = 1$, allora $f'(1) = 0$.

(d) Se $f'(x) \geq 0$ su $(0, 1)$ e $f'(x) \leq 0$ su $(1, 2)$, allora f ha massimo per $x = 1$.

(e) Se $f'(x) \geq 0$ su $(0, 1)$ e $f'(x) \leq 0$ su $(1, 2)$, allora f ha un minimo relativo per $x = 2$.

(f) Se $f'(x) \geq 0$ per ogni x in $(0, 1) \cup (1, 2)$, allora f è crescente su $[0, 2]$.

(g) Se $f'(x) \geq 0$ per ogni x in $(0, 1) \cup (1, 2)$ e se $\lim_{x \to 1^-} f(x) \leq \lim_{x \to 1^+} f(x) =$, allora f è crescente su $[0, 2]$.

(h) Se $f'(x) \geq 0$ per ogni x in $(0, 1) \cup (1, 2)$ e se $\lim_{x \to 1^-} f(x) \leq f(1) \leq \lim_{x \to 1^+} f(x) =$, allora f è crescente su $[0, 2]$.

Soluzioni. (1) c, e, f, g, h, k, l, m, o, q, r; (2) e', f, h, i; (3) c, e, h.