

ESERCIZI SUGLI INTEGRALI

Nicola Arcozzi, Analisi Matematica L-A

November 28, 2003

(A) Calcolare una primitiva di f .

1.

$$f(x) = xe^{2x}$$

2.

$$f(x) = (2x + 1) \cosh(3x)$$

3.

$$f(x) = \frac{\sin(2x)}{\sqrt{1 + \cos^2(x)}}$$

(usate un pò di trigonometria!).

4.

$$f(x) = e^{e^x} e^x$$

5.

$$f(x) = \frac{1 + \log(5x)}{x \log(5x)}$$

6.

$$f(x) = \sin(2x)e^{2x}$$

7.

$$f(x) = (e^{3x} + e^x) \sin(e^x)$$

8.

$$f(x) = \frac{1}{e^x \sqrt{1 - e^{-2x}}}$$

9.

$$f(x) = \frac{1}{x(1 + \log^2(3x))}$$

10.

$$f(x) = x \log^2(x)$$

11.

$$f(x) = x^2 \log(x)$$

12.

$$f(x) = \frac{\sin^2(x)}{\cos^2(x)}$$

(ricordate la derivata della tangente?).

(B) Calcolare i seguenti integrali

1.

$$\int_{-1/2}^{1/2} \frac{1}{4 - x^2} dx$$

2.

$$\int_0^1 \frac{x}{x^2 + 2x + 2} dx$$

3.

$$\int_{-1}^1 \frac{x + 1}{x^2 + 4x + 4} dx$$

4.

$$\int_0^1 \frac{x + 1}{x^2 + 3x + 2} dx$$

5.

$$\int_{-\pi/7}^{\pi/7} (x + 2) \cos(7x) dx$$

6.

$$\int_{e^e}^{e^{e^2}} \frac{1}{x \log(x) \log(\log(x))} dx$$

7.

$$\int_0^{\pi/10} \sin(5x)e^{5x} dx$$

8.

$$\int_{-1}^1 x^2(3x^3 + 1)^5 dx$$

(B) Alcuni esercizi sulle funzioni integrali. (Non serve calcolare gli integrali esplicitamente!). Questi esercizi sono per la miglior comprensione degli integrali, non vanno considerati come preparazione alla prova scritta.

- (i) Sia $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ la funzione integrale di $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ con estremo inferiore in $x = 0$,

$$f(x) = e^{-x^2}$$

Su quali intervalli F è crescente? Su quali intervalli F è convessa? Quali sono i punti di flesso di F ?

- (ii) Sia $F : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ la funzione

$$F(x) = \int_x^1 \frac{e^t}{t} dt$$

Calcolare $F'(x)$ e dire su quali intervalli F sia crescente o decrescente.

- (iii) Sia $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ la funzione

$$F(x) = \int_0^{\sin(x)} e^{t^2} dt$$

Calcolate F' (utilizzate il teorema sulla derivazione delle funzioni composte) e determinate su quali intervalli F sia crescente o decrescente. Sapete dare una spiegazione geometrica del risultato?

- (iv) Calcolare

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_0^x t^2 e^{t^2} dt}{x^3}$$

(Suggerimento: usare de l'Hospital).