Test di prova VI

Nicola Arcozzi

October 30, 2006

Analisi Matematica L-A

Il tempo a disposizione é di 1 ora e 30 minuti. Non si possono utilizzare calcolatrici grafiche. Non si possono utilizzare libri o appunti.

Il punteggio per gli esercizi a scelta multipla é di 3 pt. per la risposta esatta, -1 pt per una risposta errata, 0 pt. se la risposta non viene data. Nell'esercizio a risposta libera non c'é punteggio negativo.

Si viene ammessi alla seconda prova parziale scritta se (i) si provano almeno tre esercizi, (ii) si ottiene un punteggio di almeno 7 punti[1].

(1)[3pt] Sia $f\mathbb{R}-\{1\}\to\mathbb{R}$. Quale delle seguenti affermazioni esprime il fatto che

$$\lim_{x\to 1} f(x) = -\infty.$$

(i) $\forall\{x_n\}$ in $\mathbb{R}$, se $x_n \to 1$ per $n\to\infty$, allora $\forall R>0: f(x_n)>R$ definitivamente.

(ii) $\forall\{x_n\}$ in $\mathbb{R}$, se $\forall\epsilon>0\ |x_n-1|<\epsilon$ definitivamente, allora $\forall R\in\mathbb{R}: f(x_n)<R$ definitivamente.

(iii) $\forall\{x_n\}$ in $\mathbb{R}$, $\forall\epsilon>0$: $|x_n-1|<\epsilon$ definitivamente.

(iv) $\forall\{x_n\}$ in $\mathbb{R}$, se $x_n\to 1$ per $n\to\infty$, allora $\forall\epsilon>0: |f(x_n)-1|<\epsilon$ definitivamente.

(2)[3pt] Calcolare il limite

$$L = \lim_{x\to 1^+} e^{2x}\frac{x^2-2x+1}{x^2-3x+2}.$$

(i) $L=0$.

(ii) $L=-\infty$.

(iii) $L=e^2\cdot\frac{2}{3}$.

(iv) $L=e^2\cdot\frac{1}{2}$.

(3)[3pt] Calcolare

$$L = \lim_{n\to\infty}\frac{(2n+1)^2 3^n + n^3 2^n}{3^n(n^2+2^{-n})}.$$

(i) $L=0$.

(ii) $L=+\infty$.

(iii) $L=4$.

(iv) $L=\frac{4}{3}$.

[1] Nel caso del I parziale, (ii) $\Longrightarrow$ (i)!

(4)[3pt] Sia $f, g : [-1, 1] \to \mathbb{R}$ una funzione continua e sia $g(-1) = -2$, $g(1) = 2$. Allora, quale delle seguenti conclusioni possiamo trarre con certezza?

(i) $g(0) = 0$.

(ii) $\exists x \in [-1, 1] : \; g(x) = x$.

(iii) $\exists x \in [-1, 1] : \; x \cdot g(x) < 0$.

(iv) $\exists x \in [-1, 1] : \; x^2 + g(x)^2 = 0$.

(5)[3pt] Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funzione derivabile su tutto $\mathbb{R}$ e sia $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la funzione

$$h(x) = x \cdot f(x^2 + 1).$$

Supponiamo inoltre che $f(2) = 3$, $f'(2) = 0$, $f(5) = 0$, $f'(5) = 5$. Allora,

(i) $h'(2) = 40$.

(ii) $h'(2) = 3$.

(iii) $h'(2) = 0$.

(iv) $h'(2) = 20$.

(6)[2pt] Trovare il dominio della funzione $f(x) = \log 1 - 4\sin(2x)$, ristretto all'intervallo $0 \le x \le 2\pi$.